



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Departamento de Ingeniería Mecánica
PROYECTO DE FIN DE GRADO

FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES PARA FISURAS SEMIELÍPTICAS CON FORMA CÓNCAVA EN EJES GIRATORIOS CON MECANISMO DE APERTURA Y CIERRE

Autor: Roberto Valés Espinoza

Directora de proyecto: Patricia Rubio Herrero

Leganés, Julio de 2016.

PROYECTO DE FIN DE GRADO

**FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES PARA FISURAS
SEMIELÍPTICAS CON FORMA CÓNCAVA EN EJES
GIRATORIOS CON MECANISMO DE APERTURA Y CIERRE**

Autor:

Roberto Valés Espinoza

Directora de proyecto:

Patricia Rubio Herrero

Tribunal Calificador:

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Tras haberse realizado el acto de defensa y la lectura del Proyecto de Fin de Grado el día ___ de _____ de 20__ en la Universidad Carlos III de Madrid, Escuela Politécnica Superior, Leganés, el Tribunal acuerda otorgarle la calificación de

Presidente

Vocal

Secretario

"La perseverancia, la voluntad y el ingenio traen consigo la verdad, la felicidad y el éxito"

Escuela de la Vida

AGRADECIMIENTOS

La realización de este Proyecto ha supuesto un antes y un después en mi vida, llevado a cabo con mucho esfuerzo e ilusión. He aprendido muchas cosas haciendo este trabajo, y quisiera agradecer a todas las personas que me han ayudado en el desempeño del mismo, así como a la gente que me ha apoyado y dado ánimos en todo momento.

En primer lugar, quisiera darle las gracias a las profesoras del departamento, M^a Belén Muñoz Abella y a Patricia Rubio Herrero, por darme la oportunidad de realizar este proyecto y prestarme los ordenadores del despacho para trabajar. A su vez, valoro mucho toda la ayuda desinteresada por su parte.

Agradezco también el apoyo recibido por los demás profesores y becarios del departamento, Laura, Carlos y Chema.

A mis padres, William y Alba Rosa, por todo el apoyo y el cariño, ya que sin ellos no hubiera podido llegar hasta aquí.

A mi gran amigo Alexander M. Pasek, por haberme hecho pasar tan buenos momentos y además, por haberme ayudado a montar el ordenador, sin el cual no hubiera podido terminar el proyecto. Sabes que siempre que necesites ayuda me vas a tener. Pronto estaré aplaudiéndote cuando te gradúes.

A mi novia Alicia, por haberme apoyado en todo momento en los momentos más duros, robándome sonrisas siempre. Eres una persona enorme y vas a conseguir tus sueños.

A mi gato Bob, por acompañarme y estar cerca de mí mientras estudiaba y hacía trabajos.

A mis abuelos, Q.D.E.P., por incentivarme desde muy pequeño a buscar información por diferentes medios y a ser perseverante y paciente.

GRACIAS A TODOS DE CORAZÓN.

Roberto Valés Espinoza.

ABSTRACT

In this Final Degree Project, a comprehensive numerical study of Factor stress intensity along the front of a semi-elliptical with concave shape crack, contained in a rotating shaft is made.

To carry out this project, a quasistatic numerical study by the Finite Element Method is done, in order to calculate the stress intensity factor along the crack front, subjected to rotating bending.

Finally, the results obtained have been compared and validated with results from the literature.

RESUMEN

En este Proyecto de Fin de Grado, se hace un estudio numérico exhaustivo del Factor de Intensidad de Tensiones, a lo largo del frente de una fisura semielíptica, con forma cóncava, contenida en un eje giratorio.

Para poder llevar a cabo este proyecto, se hace un estudio numérico cuasiestático mediante el *Método de Elementos Finitos*, con la finalidad de calcular el Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo del frente de fisura, sometida a flexión rotativa.

Finalmente, los resultados que se han obtenido se han comparado y validado con resultados de la literatura.

ÍNDICE

	<u>PÁGINA</u>
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. MOTIVACIÓN.....	1
1.2. OBJETIVOS.....	2
1.3. ESTRUCTURA DEL PROYECTO.....	2
2. ANALYSIS AND SYNTHESIS OF THE PROJECT.....	5
2.1. MOTIVATION.....	5
2.2. OBJECTIVES.....	6
2.3. THEORETICAL INTRODUCTION AND INTERPRETATION OF DATA OBTAINED.....	6
2.3.1. THEORETICAL INTRODUCTION.....	6
2.3.2. EXTRACTION AND INTERPRETATION OF DATA.....	12
2.4. RESULTS.....	13
2.4.1. VALIDATION OF THE RESULTS.....	13
2.4.2. SIF RESULTS FOR A COMPLETE CYCLE.....	14
2.5. CONCLUSIONS.....	14
3. PLANTEAMIENTO TEÓRICO DE LA MECÁNICA DE LA FRACTURA EN EJES FISURADOS.....	16
3.1. CONCEPTOS BÁSICOS.....	16
3.1.1. PLANTEAMIENTO LOCAL DE LA FRACTURA.....	16
3.1.2. PLANTEAMIENTO GLOBAL DE LA FRACTURA.....	21



3.2. COMPORTAMIENTO DE EJES CON FISURAS.....	22
3.2.1. TIPOLOGÍA DE LA FISURA EN EJES ROTATIVOS.....	22
3.2.2. APERTURA Y CIERRE DE FISURA.....	27
3.3. CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN EJES FISURADOS.....	31
4. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	33
4.1. INTRODUCCIÓN.....	33
4.2. CONCEPTOS BÁSICOS.....	33
4.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON “ABAQUS 6.11 ®”.....	36
4.3.1. DESCRIPCIÓN DEL <i>SOFTWARE</i> ABAQUS.....	36
4.3.2. MÓDULOS DE ABAQUS PARA EL DISEÑO DE LOS MODELOS.....	37
4.3.3. ARCHIVOS DE ABAQUS IMPORTANTES EN EL ANÁLISIS.....	39
5. MODELO NUMÉRICO.....	41
5.1. MODELO GEOMÉTRICO.....	41
5.1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	41
5.2. MODELO NUMÉRICO.....	45
5.2.1. GEOMETRÍA DEL MODELO.....	45
5.2.2. MATERIAL Y SUS PROPIEDADES.....	46
5.2.3. ENSAMBLAJE DE LAS PARTES DEL MODELO.....	46
5.2.4. CONTACTOS SUPERFICIALES EN LA SECCIÓN DE LA FISURA.....	47
5.2.5. CONDICIONES DE CONTORNO Y CARGAS SOBRE EL EJE.....	48
5.2.6. DISCRETIZACIÓN Y MALLADO.....	49
5.2.7. OBTENCIÓN DE LOS RESULTADOS DEL FIT.....	51



6. RESULTADOS DEL MODELO Y DISCUSIÓN DE LOS MISMOS.....	53
6.1. RESULTADOS DEL FIT PARA UN CICLO COMPLETO.....	53
6.1.1. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,00$	53
6.1.2. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,25$	57
6.1.3. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,50$	60
6.1.4. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,75$	63
6.1.5. FACTOR DE FORMA $\beta = 1,00$	66
7. VALIDACIÓN DEL MODELO.....	71
8. CONCLUSIONES.....	78
9. PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO DEL PROYECTO.....	80
10. TRABAJOS FUTUROS.....	84
BIBLIOGRAFÍA.....	86



ÍNDICE DE TABLAS

	<u>PÁGINA</u>
Tabla 5.1.1: Cotas y cargas en el eje.....	42
Tabla 5.1.2: Propiedades del aluminio.....	42
Tabla 9.1: Planificación del proyecto.....	80
Tabla 9.2: Inversiones para el proyecto.....	81
Tabla 9.3: Amortización de las inversiones.....	82

ÍNDICE DE FIGURAS

	<u>PÁGINA</u>
Figura 3.1: Modos básicos de fractura mecánica: i) Modo I (apertura), ii) Modo II (cortadura), iii) Modo III (cizalladura).....	17
Figura 3.2: Sistema de coordenadas en el borde de fisura, y componentes tensionales en el punto sólido infinitesimal [11].....	20
Figura 3.3: Tipos de fisuras.....	23
Figura 3.4: Tipos de concavidad en fisuras.....	23
Figura 3.5: Dibujo acotado de la sección fisurada del eje (fisura convexa).....	24
Figura 3.6: Dibujo acotado de la sección fisurada del eje (fisura cóncava).....	25
Figura 3.7: Sistema de referencia en la rotación del eje.....	26
Figura 3.8: Posiciones angulares del eje fisurado.....	27
Figura 3.9: Función de apertura y cierre para el modelo de fisura abierta [25, 26, 27].....	28
Figura 3.10: Función de apertura y cierre propuesta por Gasch [28, 29].....	29
Figura 3.11: Función de apertura y cierre propuesta por Mayes y Davies [30].....	30
Figura 3.12: Línea de cierre de fisura para diferentes instantes del ciclo del eje (modelo Darpe [31]).....	31
Figura 4.1: Esquema de un modelo físico [37].....	34
Figura 4.2: Diagrama de bloques del análisis de un modelo.....	37
Figura 5.1: Esquema del eje rotativo fisurado.....	41
Figura 5.2: Diferentes formas de fisura con sus profundidades relativas.....	43
Figura 5.3: Posiciones relativas en el frente de fisura.....	44
Figura 5.4: Esquema del eje fisurado con sus diferentes parámetros característicos e influencia en el valor del FIT.....	44
Figura 5.5: Particiones transversales del semieje en ABAQUS/CAE.....	45
Figura 5.6: Secciones longitudinales del eje en ABAQUS/CAE.....	46
Figura 5.7: Ensamblaje de los dos semiejes.....	47



Figura 5.8: Restricciones e interacciones a diferentes profundidades.....	48
Figura 5.9: Cargas y condiciones de contorno en ABAQUS/CAE.....	49
Figura 5.10: Mallado de la sección fisurada para $\beta = 0,50$	50
Figura 5.11: Detalle del mallado en las proximidades de la sección fisurada.....	50
Figura 6.1: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,1$	54
Figura 6.2: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,2$	54
Figura 6.3: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,3$	55
Figura 6.4: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,4$	55
Figura 6.5: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,5$	56
Figura 6.6: Diferentes estados de apertura y cierre de la fisura.....	57
Figura 6.7: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,1$	57
Figura 6.8: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,2$	58
Figura 6.9: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,3$	58
Figura 6.10: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,4$	59
Figura 6.11: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,5$	59
Figura 6.12: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,1$	60
Figura 6.13: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,2$	61
Figura 6.14: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,3$	61
Figura 6.15: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,4$	62
Figura 6.16: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,5$	62
Figura 6.17: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,1$	63
Figura 6.18: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,2$	64
Figura 6.19: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,3$	64
Figura 6.20: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,4$	65



Figura 6.21: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,5$	65
Figura 6.22: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,1$	66
Figura 6.23: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,2$	67
Figura 6.24: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,3$	67
Figura 6.25: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,4$	68
Figura 6.26: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,5$	68
Figura 7.1: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [11] para $\alpha = 0,1$	72
Figura 7.2: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [11] para $\alpha = 0,2$	73
Figura 7.3: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [11] para $\alpha = 0,3$	74
Figura 7.4: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [11] para $\alpha = 0,4$	75
Figura 7.5: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [11] para $\alpha = 0,5$	76

GLOSARIO

FIT	Factor de intensidad de tensiones
SIF	Stress Intensity Factor
MEF	Método de los elementos finitos
MFLE	Mecánica de la fractura lineal elástica
xyz	Sistema de coordenadas cartesianas
u_x	Desplazamiento en la dirección x
u_y	Desplazamiento en la dirección y
u_z	Desplazamiento en la dirección z
σ_{xx}	Tensión perpendicular al plano yz
σ_{yy}	Tensión perpendicular al plano xz
σ_{zz}	Tensión perpendicular al plano xy
σ_{ij}	Componentes del tensor de tensiones
u_i	Componentes del campo de desplazamientos
r, ψ	Coordenadas polares, (distancia e inclinación)
K_I	Factor de intensidad de tensiones para el modo de fractura I
K_{IC}	Tenacidad de fractura
ν	Módulo de Poisson
G	Módulo de cizalladura
F_I	Factor de intensidad de tensiones adimensionalizado para el modo de fractura I



σ	Tensión generada por cargas externas en el eje
a	Profundidad de fisura
G	Tasa de liberación de energía
F	Trabajo realizado por las fuerzas externas
U	Energía liberada por la deformación
R	Resistencia opuesta por el sólido al avance de grieta
E	Módulo elástico o módulo de Young
E'	Módulo de elasticidad aparente
D	Diámetro del eje rotativo
b	Semieje mayor de la elipse
a	Semieje menor de la elipse y profundidad de fisura
h	Distancia del centro de la fisura al punto más periférico de la misma
w	Distancia del centro de la fisura a un punto arbitrario de la misma
α	Profundidad relativa de fisura
β	Factor de forma de la fisura
γ	Posición relativa en el borde de fisura
θ	Posición angular durante un ciclo del eje
σ_n	Tensión normal generada por esfuerzos flectores
M	Momento flector de una sección del eje
y	Distancia desde la fibra neutra hasta el punto estudiado de la sección del eje
I	Momento de inercia de la sección transversal del eje rotativo



b^*	Semieje mayor de la elipse de la fisura propagada
a^*	Semieje menor de la elipse de la fisura propagada
ΔK_I	Diferencia entre los factores de intensidad de tensiones máximo y Mínimo del Modo I
N	Número de ciclos o vueltas que da el eje fisurado
$K_{I_{max}}$	Factor de intensidad de tensiones máximo del Modo I
$K_{I_{min}}$	Factor de intensidad de tensiones mínimo del Modo I
C, n, p, q	Propiedades del material del eje fisurado
f	Función de apertura de la grieta
\Re	Tensión media
K_c	Factor de intensidad de tensiones crítico
K_{th}	Valor umbral del factor de intensidad de tensiones
CAD	Computer aided design (diseño asistido por ordenador)
P	Carga puntual que actúa sobre el eje
l	Distancia entre un apoyo del eje y su carga puntual más cercana
L	Longitud del eje
K_{I_i}	Factor de intensidad de tensiones total para el modo I en el punto i
$K_{I_{\gamma CRACK1}}$	Factor de intensidad de tensiones para el CRACK-1 para el modo I en la posición relativa γ
$K_{I_{\gamma CRACK2}}$	Factor de intensidad de tensiones para el CRACK-2 para el modo I en la posición relativa γ
F_{I_i}	Factor de intensidad de tensiones adimensionalizado en la posición relativa γ
t_S	Tiempo total de la simulación de los casos
\bar{T}	Tiempo promedio por caso



N_C	Número total de casos
C_{AMORT}	Coste de amortización de los bienes o servicios
T	Tiempo de utilización de los bienes o servicios
V	Vida útil del bien o servicio
A	Coste total del bien o servicio
η	Rendimiento de la utilización de los bienes o servicios



1. INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN

El estudio, diseño y fabricación de máquinas es uno de los pilares fundamentales de la Ingeniería Mecánica. Las máquinas son de vital importancia en la Industria, y se tiene como misión velar por su adecuado funcionamiento y mantenimiento.

Las máquinas poseen un elemento característico e imprescindible, el eje de transmisión, cuya función principal es transmitir potencia a través de movimientos rotativos, dependiendo de otros mecanismos que puede tener anexados, como pueden ser los engranajes, levas, poleas, etc. En la mayor parte de los casos, los ejes están sometidos a cargas alternantes (axiales, de flexión, torsión), y pueden tener zonas concentradoras de tensión (taladros, cambios de diámetros, pequeños radios de acuerdo,...), lo cual da como resultado que estén sometidos a fatiga.

Las fisuras en los ejes pueden aparecer según las condiciones de servicio del conjunto mecánico correspondiente (ya sea por defectos de fabricación, esfuerzos presentes en dicho eje,...). Las fisuras transversales al eje se propagan en planos paralelos a las mismas, generando una disminución de la rigidez del eje y un aumento de la flexión del mismo (aumentando su desplazamiento en la dirección de la propagación de la fisura). Otro fenómeno importante que traen consigo las fisuras es la disminución de las frecuencias vibratorias (se entra en resonancia), lo cual puede ser detectado mediante sistemas de detección de grietas, basados en el análisis de la señal de resonancia. También existen otros métodos, como los ultrasonidos, emisión acústica, termografía infrarroja, etc. Estos métodos ayudan a la temprana detección de fisuras en el elemento mecánico, para poder reemplazar el elemento dañado y así, evitar un costoso mantenimiento por rotura del mismo.

Finalmente, la presencia de una fisura en un eje con distintas cargas, da lugar a la propagación de la misma (se genera una grieta), y si no se detecta tiempo, dará lugar a la posterior rotura del eje, lo cual es un hecho catastrófico, ya que el conjunto mecánico dejaría de funcionar y podría dar lugar a graves consecuencias.

Se debe tener en cuenta que, hasta la fecha, la mayoría de los estudios realizados son acerca de las fisuras rectas o semielípticas/semicirculares de forma convexa en ejes. No obstante, también pueden aparecer fisuras cóncavas en ejes, y en este estudio se simularán numéricamente algunos casos de fisuras cóncavas.



El Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) es un parámetro relacionado con el estado tensional en el frente de la fisura. En el caso de ejes rotatorios, el FIT variará sus valores, debido a que se produce un mecanismo de apertura y cierre en la fisura.

Para contribuir en esta dirección, se ha hecho un estudio pormenorizado del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), para fisuras semielípticas de forma cóncava en ejes rotatorios. Dicho estudio se llevará a cabo mediante un análisis numérico, utilizando el Método de los Elementos Finitos, para así obtener los valores del FIT, por medio de la variación de los parámetros geométricos de la fisura (profundidad y forma), la posición relativa en el frente y posición angular en el giro.

1.2. OBJETIVOS

Se tiene como principal objetivo el estudio de los valores del FIT en función de las características geométricas de la fisura (profundidad y forma), la posición relativa en el frente y ángulo de giro del eje. Para ello se ha realizado un modelo numérico, utilizando un software de modelización con elementos finitos (en este caso se utilizará ABAQUS/CAE, versión 6.11).

Los datos obtenidos se compararán y analizarán detenidamente, estudiando todos los parámetros principales y su influencia en los resultados finales.

1.3. ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

Este proyecto está compuesto por varias partes:

En la introducción se exponen la motivación, objetivos y estructura del proyecto

Siguiendo con un resumen en inglés, el cual consta de cinco partes: introducción, objetivos, desarrollo del proyecto, resultados y conclusiones

Continuando con un estudio teórico de la mecánica de la fractura.



Prosiguiendo con un acercamiento al funcionamiento de ABAQUS, analizando sus diferentes módulos, los cuales nos van a permitir crear y simular los modelos numéricos de nuestro problema físico.

A esto le sigue el desarrollo del problema mediante métodos numéricos, en el cual profundizaremos en el diseño en ABAQUS de dicho problema físico.

Se prosigue con el análisis y discusión de los resultados obtenidos.

Posteriormente se hará una comparación con otros estudios, lo cual servirá para validar el proyecto.

A esto le sigue un apartado de conclusiones importantes apreciadas en los resultados.

A continuación se presentará la planificación y presupuesto del proyecto.

El siguiente punto a tratar será una propuesta de trabajos futuros.

Finalmente, se expondrá la bibliografía consultada como referencia, la cual ha complementado este estudio numérico.



2. ANALYSIS AND SYNTHESIS OF THE PROJECT

2.1. MOTIVATION

The study, design and manufacturing of machines is one of the fundamental stones of Mechanical Engineering. These machines are of extreme importance in the Industry, and a key goal is to look after their correct performance and maintenance.

Machines are provided with a very characteristic and essential element, which is the transmission shaft, as its main function is to convey the power through rotation movements, depending on other mechanism that they may have annexed as gears, pulleys, cams, etc. In most cases shafts are put through alternating loads (axial, torsional or flection), and may have stress focusing regions (drill holes, diameter fluctuations, small fillets...), what in turn puts them under fatigue.

The shaft cracks can appear depending on the overall mechanical services (manufacturing defects, present shaft strains...). Cracks which are transversal to the shaft will propagate parallel to themselves, decreasing the shaft stiffness and increasing its flection (increasing their displacement in the crack propagation direction). Another important phenomenon consequent to crack appearance is the decrease of vibrational frequencies (resonance is reached), what can be detected by crack detection toolkits based on the resonance signal analysis. Other methods exist as well, for instance ultrasound, acoustic emission, infrared thermography, etc. These methods increase the early detection of the mentioned cracks in the mechanical piece, helping in the faulty element replacement and thus, preventing an expensive replacement due to its breakage.

Finally, the presence of a crack in a shaft with different loads will lead to its propagation (a rift is generated), and if not detected in time, will result on the breakage of the shaft, what is a catastrophic event as the mechanical set would stop working, leading to serious consequences.

It should be noted that, to date, most studies are about straight, semi-elliptical and semi-circular convex shaft fissures. However, concave fissures also may appear in shafts, and in some cases this study concave fissures numerically simulated.

The Stress Intensity Factor (SIF) is a parameter related to the stress state in front of the crack. In the case of rotating shafts, the SIF values will vary, because an opening and closing mechanism in the crack occurs.

To continue in this aspect, it has made a detailed study of the stress intensity factor (SIF) for semi-elliptical concave cracks in rotating shafts. This study will be conducted by a numerical analysis using the finite element method, to obtain the values of SIF, by varying the geometric parameters of the crack (depth and shape), the relative position on the front and angular position in the rotation.

2.2. OBJECTIVES

The main objective is to study FIT values depending on the geometric characteristics of the fissure (depth and shape), the relative position on the front and angle of shaft rotation. For this a numerical model using a software finite element modelling is made (in this case ABAQUS / CAE, version 6.11 will be used).

The obtained data will be compared and analysed carefully, studying all the major parameters and their influence on the final results.

2.3. THEORETICAL INTRODUCTION AND INTERPRETATION OF DATA OBTAINED

2.3.1. THEORETICAL INTRODUCTION

Fracture mechanics, and in particular the linearly elastic fracture mechanics (LEFM), is a field based on the study and the analysis of crack propagation phenomena present during fissure propagation among cracked solids or discontinuity presence. This science starts in the early 20th century, with the goal of complementing the linearly elastic theory of Solid Mechanics which at that time did not consider potential cracking, defects, and stress focal areas in the overall solid.



The LEFM started to be developed thanks to A. A. Griffith [1], approximating with great precision the phenomena in materials whose behavior is mainly elastic (like ceramics), free of plastic strain in regions close to the fissure front.

Subsequently, the improvements in the Fracture Mechanics grew at exponential rate, G. R. Irwin [2] and E. Orowan [3] implemented significant advances, taking into account the fundamental role that plays the plasticity in Fracture Mechanics. Furthermore, other authors like Paris and Erdogan [4] (crack propagation), J. R. Rice [5] and G.P. Cherepanov [6] (J integral), have all contributed greatly with studies about crack propagation and plastic-linear fracture Mechanics.

In order to obtain an accurate analysis of the mechanisms which take place in a cracked solid (which are fissure propagation and breakage under negligible plastic strain, stresses and elastic strains at the fissure edge), it is appealed to linearly elastic Fracture Mechanics (LEFM), which can help us in forewarning and studying the propagation and breaking mechanisms of the linearly elastic solids.

This science is born thanks to contributions from the English aeronautical engineer Alan Arnold Griffith [1], who did not only propose a model of a stress behavior in the vicinity of the fissure edge (where the product between the stress present at the fissure and the square root of the crack depth was used to be constant), but also provided an energetic model (energy release rate), founded in the First Law of Thermodynamics (Energy Conservation Law). Subsequently, Irwin [2] introduced improvements in the Energy Release Rate equation, and other great contribution; the stress and displacement field study at the fissure front, leading to the Stress Intensity Factor (SIF) discovery.

Before getting more immersed in the LEFM, it is advisable to classify the basic methodology of Fracture Mechanics in linearly elastic solids, which differ between each other depending on the stress disposition with respect to the crack plane (see figure 3.1).

When observing Mode I, present in figure 3.1 i), the stresses are perpendicular to the crack plane, in turn the displacements of both cracked regions (crack edges); continuing with mode II, present in figure 3.1 ii), the stresses and displacements at the fissure edges are parallel to the crack plane, which in turn coincide with the propagation and stress directions; finally, the Mode III, present in figure 3.1 iii), the stresses and displacements at the fissure edges are parallel to the crack plane and, in turn, are perpendicular to the propagation directions.

For each crack mode, there exists a Stress Intensity Factor, being K_I , K_{II} , and K_{III} for each mode, respectively [2]. These three SIF will mainly depend on the crack depth, extern loads and on the solid's geometry, being a perfect image of the stress behavior and of the strains in the vicinity of the fissure depth and, in addition, encompassing all the fissure propagation modes (modes I,II,III).

The LEFM, in principle, sustains that the cracking and breaking origin comes from high stress focusing in regions very close to the crack edge, while in many other solids (regions sufficiently far from that critical point) the aforementioned behavior is not observed (Saint-Venant Elasticity Principle) [7].

Mode I equations have an intrinsic and fundamental factor for the LEFM analytical studies, known as Stress Intensity Factor (SIF), which was derived by George Rankine Irwin [2], who associated the stress and displacement fields close to the edge front. Those mentioned equations are noted from 3.1.1 until 3.1.7.

The simplified equations for strain and stress can be seen in equations 3.1.1 and 3.1.2 [8, 9, 10].

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \mathcal{F}_{ij}(\psi) \quad (3.1.1)$$

$$u_i = \frac{K_I}{2\nu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \mathcal{L}_i(\psi, \nu) \quad (3.1.2)$$

Where σ_{ij} and u_i are the stress tensor and displacement field, respectively. They have a Cartesian reference system xyz , r and ψ are the infinitesimal point polar coordinates of the solid of interest; K_I is the SIF for fracture Mode I; $\mathcal{F}_{ij}(\psi)$ and $\mathcal{L}_i(\psi, \nu)$ are non-dimensional functions, which depend on ψ ; as well as ψ and ν , respectively.

The equations from 3.1.3 until 3.1.5 equations 3.1.1 and 3.1 will be presented in an expanded form.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\psi}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\psi}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\psi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.1.4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[1 - 2\nu + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] \\ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

$$u_z = 0 \quad (3.1.7)$$

Expressions 3.1.1 and 3.1.5 is known as σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} normal stresses of the infinitesimal solid; τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} as shear stresses; u_x , u_y , u_z as displacement vector components; r y ψ are the polar coordinates which indicate the position of an infinitesimal solid, whose reference system (xyz) has the origin at the crack edge; K_I is the SIF for Mode I; ν is the Poisson constant, G is the shear modulus; note that, equation 3.1.7 hints a plane strain state.

The mechanical problem can be visualized in figure 3.1.

The SIF gives information of present stress magnitudes at the crack edge, is directly proportional to the stress (which gives us information of external loads to our mechanical system) and in base of the crack depth. In equation 3.1.8 can be seen its most common expression.

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.1.8)$$

Solving for F_I :

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (3.1.8.1)$$

Where F_I is a non-dimensional factor which depends on the fissure shape, known also as dimensionless SIF; σ is the stress yielded by the external loads to the solid; a is the crack's depth.

The SIF has pressure times square root length units, $Pa * \sqrt{m}$. In the International System its units are $Kg * m^{-\frac{1}{2}} * s^{-2}$. In Fracture Mechanics its most common units are $MPa * \sqrt{m}$.

If the SIF reaches a critical value, known as fracture toughness (K_{IC}), which is an intrinsic material property, the crack will start to propagate. Algebraically, the criterion would be set as seen in the equation 3.1.9.

$$K_I \geq K_{IC} \quad (3.1.9)$$

Next, once finished the study of the local posing, a global crack posing analysis will be performed, from the energy point of view.

Griffith and Irwin [1, 2] used the equation intrinsically related to the First Law of Thermodynamics, which was founded on energy conservation, as it can be appreciated in equation 3.1.10.

$$G = \frac{dF}{da} - \frac{dU}{da} \quad (3.1.10)$$

Where F is the work performed by the external loads; U is the released energy by the deformation; a is the crack depth in the solid; G is the energy release rate. It is possible to compute this function, taking care at a series of parameters as crack depth, the mechanical element's geometry, and stress.

On the other hand, it is necessary to introduce a new parameter, known as R , defined as the resistance of the solid towards the crack propagation. It must be noted that, unlike G , R is an empirically determined property, it is not possible to determine it accurately. In equation 3.1.11 one of the main energetic criteria for crack propagation will be shown, it will indicate the energy release rate which must overcome or match the crack propagation resistance, only in this way the crack can push forward.

$$G \geq R \quad (3.1.11)$$

It is important to highlight the existence of a relation between the SIF and the energy release rate G , which is shown in the equation 3.1.12.

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3.1.12)$$

Where E' is an analogous term to the elastic modulus, as it takes values $E' = E$ assuming plane stress, and $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ under plane strain assumption.

In last instance, it is necessary to note a coincidence between the LEFM, which is that the energy release rate, G must be equal to the J integral [5].

Next, the crack shape will be studied, both in static shafts and rotational ones, followed by the analysis of a crucial phenomenon for cracked rotational shaft studying, which is the crack closing and opening.

There exist different fissure shapes, being straight [13], semi-elliptical [10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22], and semi-circular [23, 24] geometries the most common amongst them, as can be seen in figure 3.3. However, cracks also tend to be semi-elliptical in engineering cases.

Where it is held: i) straight fissure; ii) semi-elliptical fissure; iii) semi-circular fissure.

For the type of curve classification, to semi-elliptical and semi-circular shapes will be applied the following criterion: there can be differentiate as convex (there is a considerable amount of studies on the research of the SIF for thee crack's edge for this type of geometry) [15, 18, 19, 20, 21, 22], and concave (there is little or no record of research on SIF studies for these geometries) [10, 16, 17], as seen in figure 3.4.

In Figure 3.4 both crack types can be appreciated. In Figure 3.4 (i) you can see a convex fissure, while in Figure 3.4 (ii) can appreciate a concave fissure. Fissures studied in this project are concave.

The majority of the studies realised have centred in the semi-elliptical fissures convex [15 18, 19, 20, 21, 22], nevertheless, also have found in the literature some works with semi-elliptical concave fissures [10, 16, 17].

In figure 3.5 it can be seen the transversal section of a shaft that presents a convex semi-elliptical crack. It is observed that the centre of the elipse finds situated in the inferior point of the section of the shaft.

Where it's held: D diameter of the shaft; a and b are the semi-minor axis and the semi-major axis respectively, of the convex fissure; h is the distance of the centre of the fissure to the most peripheral point of the same; w is the distance of the centre of the fissure to an arbitrary point of the same.

Additionally, In the figure 3.6 it can be seen the transversal section of a shaft that presents a concave semi-elliptical crack. It observes that the centre of the elipse finds situated in the upper point of the section of the shaft.

Where it's held: D diameter of the shaft; a' and b' are the semi-minor axis and the semi-major axis respectively, of the concave fissure; h is the distance of the centre of the fissure to the most peripheral point of the same; w is the distance of the centre of the fissure to an arbitrary point of the same.

The characteristic parameters of the semi-elliptical cracks are:

- Diametrical relative crack depth, α .

$$\alpha = \frac{a}{D} \quad (3.2.1)$$

- Factor of curvature of the crack tip, β .

$$\beta = \frac{a}{b} \quad (\text{convex crack}) \quad (3.2.2)$$

$$\beta' = \frac{a'}{b'} \quad (\text{concave crack}) \quad (3.2.3)$$

Where β ranges from $\beta = 0$ (straight crack) to $\beta = 1$ (semicircular fissure) through intermediate states, where the crack tip has a semi-elliptical shape.

- Relative position in the crack tip, γ .

$$\gamma = \frac{w}{h} \quad (3.2.4)$$

The rotation angle, θ , will be ranged between 0 and 360 degrees, when treating of a complete cycle. In the figure 3.7 can display the reference system for that turn.

In Figure 3.8 it can be seen the cracked section of the rotating shaft in several angular positions.

2.3.2. EXTRACTION AND INTERPRETATION OF DATA

Using ABAQUS' Crack modulus, a Deep analysis on the crack can be performed, obtaining the SIF. The obtainment of the SIF, in each point of the crack's edge, is possible thanks to the contour integrals estimation (J integrals) [5]. For this purpose, it is necessary to introduce the number of contours in the program for the computation of the SIF. After the result analysis, it has been determined that the convergence brings out from five contours.

2.4. RESULTS

2.4.1. SIF RESULTS FOR A COMPLETE CYCLE

After making a thorough study of SIF, for concave-shaped cracks for a complete revolution of the shaft, it is necessary to note certain transcendental observation in the study of this phenomenon (see figures from 6.1 to 6.26).

It can be seen that the fissure closing area decreases, without depending on shape factor, as the relative depth increases. Likewise, the period in which the crack is completely open decreases as the depth increases (regardless of curvature factor). (see figure 6.6).

Another important observation is the increase in the dimensionless SIF as a function of the increase in relative depth, what is logical, as the stresses at the crack tip are much higher than stresses produced by external loads, and increase with respect to relative depth, producing an increase in the dimensionless SIF.

For most cases, for the angular position of 135° , the crack is closed almost completely, since it has nulls and near zero values. For the case of $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ the crack fails to close completely during the cycle; however, in most cases, midcycle the crack has been completely closed.

It should be noted that, as it increases the curvature of the edge crack, the SIF grows in their central points and decreases at the ends.

It is important to visualize the extreme values of the SIF in the graphs, it is observed that for the angular position of 0 degrees, SIF values are maximum. In contrast to the time of the hemicycle (angular position of 180 degrees), where the SIF minimum values are appreciated.

Is worth mentioning that SIF values are symmetrical to opposite values of γ , with symmetry $\theta = 180^\circ$.

2.4.2. VALIDATION OF THE RESULTS

To validate the numerical model, the results obtained will be compared with Rubio P. [11] to the case straight crack front ($\beta = 0$).

Then comparative graphs will be presented, in order to visualize the data and comparison with data regarding Rubio P. [11].

As it can be seen from figures 7.1 to 7.5, the results are very similar to the source with which it is compared with a relative error less than 4% in 95% of the data compared. For the next to the intermediate strip between the open area and the area enclosed area, the error is slightly larger because this is a problem area.

2.5. CONCLUSIONS

Different conclusions have been obtained after the realization of the study, which are summarized as follows:

- The SIF increases in all the crack tip points as the relative depth increases.
- As the curvature of the crack tip is increased, the SIF grows at its central points and decreases in both extremes.
- For the cycle's 0° angular position maximum SIF values are obtained (the crack is completely open), while the minima are obtained at 180° (the fissure is nearly completely closed in the majority of the cases).
- The closing zone of the crack and the opening zone of the crack decrease when relative depth is increased (regardless of curvature factor).

3. PLANTEAMIENTO TEÓRICO DE LA MECÁNICA DE LA FRACTURA EN EJES FISURADOS

3.1. CONCEPTOS BÁSICOS

La mecánica de la fractura, y en particular la mecánica de la fractura lineal elástica (MFLE), es una disciplina que se basa en el estudio y análisis de los fenómenos presentes durante la propagación de grietas en sólidos fisurados o con presencia de discontinuidades. Esta ciencia nace a principios del siglo XX, con el propósito de complementar a la teoría de la elasticidad lineal, la cual por aquel entonces no consideraba posibles fisuras, defectos, concentradores de tensión en los sólidos.

La MFLE se empezó a desarrollar gracias a A.A. Griffith [1], dando muy buenas aproximaciones para materiales cuyo comportamiento es puramente elástico (como pueden ser los materiales cerámicos), libre de deformaciones plásticas en zonas cercanas al frente de fisura.

Posteriormente, las mejoras en la mecánica de la fractura crecieron a un ritmo exponencial, G. R. Irwin [2] y E. Orowan [3] introdujeron mejoras trascendentales, teniendo en cuenta el papel fundamental que presenta la plasticidad en la mecánica de la fractura. También otros autores, como Paris y Erdogan [4] (Propagación de fisuras), J.R. Rice [5] y G.P. Cherepanov [6] (Integral J), han hecho importantes estudios acerca de propagación de las fisuras y de la Teoría de la fractura elástico-plástica.

3.1.1. PLANTEAMIENTO LOCAL DE LA FRACTURA

Para poder obtener un análisis bastante fiel de los mecanismos que suceden en un sólido fisurado (los cuales son propagación de grietas y rotura bajo la premisa de deformaciones plásticas despreciables, tensiones y deformaciones elásticas en el borde de fisura), se recurre a la Mecánica de la fractura lineal elástica (MFLE), que nos

ayuda a prevenir y estudiar mecanismos de propagación y rotura de sólidos elástico-lineales. Esta ciencia nace gracias a las aportaciones del ingeniero aeronáutico inglés Alan Arnold Griffith [1], el cual no sólo propuso un modelo de comportamiento tensional en la cercanía del borde de fisura (donde el producto de la tensión presente en la fisura por la raíz de la profundidad de la fisura solía ser constante), sino que también aportó un modelo energético (Tasa de liberación energética), basado en el Primer Principio de la Termodinámica (Conservación de la energía). Posteriormente, Irwin [2] introduce mejoras en la ecuación de la Tasa de liberación energética, y otro gran aporte que hizo fue el estudio de tensiones y campos de desplazamiento en el frente de fisura, llevando consigo al posterior descubrimiento del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT).

Antes de profundizar en el MFLE, conviene hacer una clasificación de los modos básicos de fractura mecánica en sólidos elástico-lineales, las cuales difieren entre sí según la disposición de los esfuerzos con respecto al plano de fractura (véase la figura 3.1).

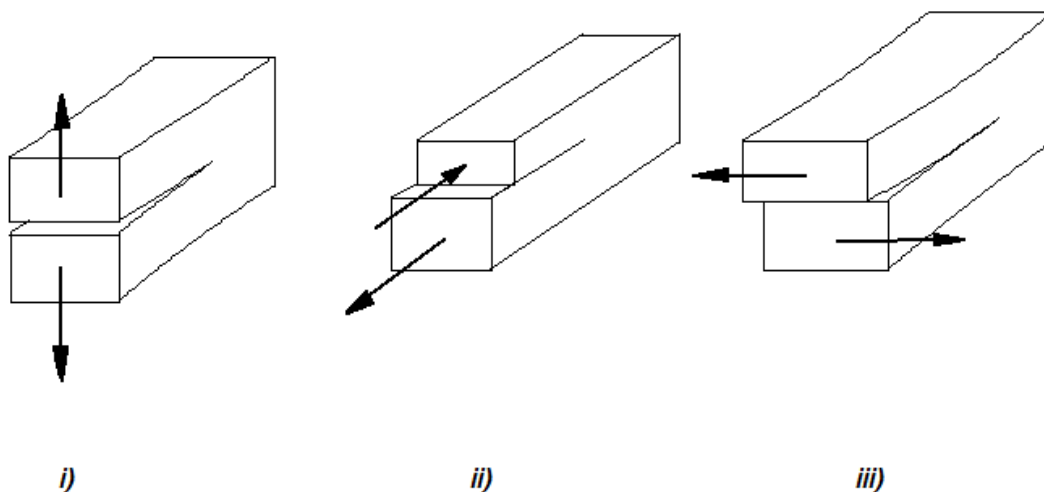


Figura 3.1: Modos básicos de fractura mecánica: i) Modo I (apertura), ii) Modo II (cortadura), iii) Modo III (cizalladura).

Al observar el Modo I, presente en la figura 3.1 i), los esfuerzos tensionales son perpendiculares al plano de la fisura, a su vez que los desplazamientos de las dos zonas fisuradas (labios de la fisura); siguiendo con el Modo II, presente en la figura 3.1 ii), los esfuerzos y desplazamientos de los labios de la fisura son paralelos al plano de fisura, a su vez coinciden las direcciones de propagación y tensión; finalmente, el Modo III, presente en la figura 3.1 iii), los esfuerzos y desplazamientos de los labios de la fisura son paralelos al plano de la fisura y, a su vez, son perpendiculares a la dirección de propagación.

Para cada modo de fractura existe un Factor de Intensidad de Tensiones, siendo K_I para el modo I, K_{II} para el modo II, y K_{III} para el modo III [2]. Estos tres FIT dependerán principalmente de la profundidad de fisura, de las cargas externas y de la geometría del sólido, siendo la perfecta imagen del comportamiento tensional y de deformaciones en las proximidades del frente de fisura y, a su vez, comprendiendo todos los modos de propagación de fisuras (modos I, II y III).

La MFLE, como principio básico, sostiene que el origen del agrietamiento y rotura viene dado por la concentración de altas tensiones presentes en zonas muy próximas al borde de fisura, mientras que adversamente, en el resto del sólido (zonas suficientemente alejadas de dicha zona crítica) no se percibe dicho comportamiento (Principio de Saint-Venant de la elasticidad) [7].

Las ecuaciones del Modo I llevan un parámetro inherente y fundamental para el estudio teórico de la MFLE, se trata del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), el cual vino de la mano del científico George Rankine Irwin [2], quien lo asoció a los campos de tensiones y desplazamientos cercanos al frente de la fisura. Dichas ecuaciones serán explicadas y nombradas desde la 3.1.1 hasta la 3.1.7.

Las ecuaciones para las tensiones y deformaciones se pueden ver de forma simplificada en las ecuaciones 3.1.1 y 3.1.2 [8, 9, 10].

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \mathcal{F}_{ij}(\psi) \quad (3.1.1)$$

$$u_i = \frac{K_I}{2\nu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \mathcal{L}_i(\psi, \nu) \quad (3.1.2)$$

Donde σ_{ij} y u_i son las componentes del tensor de tensiones y del campo de desplazamientos respectivamente, los cuales tienen como referencia un sistema de coordenadas cartesianas xyz ; r y ψ son las coordenadas polares del punto infinitesimal del sólido a estudiar; K_I es el FIT para el Modo I de fractura; $\mathcal{F}_{ij}(\psi)$ y $\mathcal{L}_i(\psi, \nu)$ son funciones adimensionales, las cuales dependen de ψ ; y de ψ y ν respectivamente. En las ecuaciones que van desde la ecuación 3.1.3 hasta 3.1.7 se presentarán las ecuaciones 3.1.1 y 3.1.2 de forma desarrollada.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\psi}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\psi}{2}\right)\right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\psi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.1.4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[1 - 2\nu + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] \\ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \left[2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

$$u_z = 0 \quad (3.1.7)$$

En las expresiones 3.1.1 a 3.1.5 se tienen: σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} tensiones normales del sólido infinitesimal; τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} tensiones tangenciales del sólido infinitesimal; u_x , u_y , u_z componentes del vector de desplazamientos; r y ψ son las coordenadas polares, que indican la posición de un elemento infinitesimal, cuyo sistema de referencia (xyz) tiene el origen de coordenadas en el borde de la fisura; K_I es el FIT para el Modo I; ν es el coeficiente de Poisson, G es el módulo de cizalladura; nótese que, mediante la ecuación 3.1.7, se sabe que hay estado de deformación plana.

Se puede visualizar este problema mecánico en la figura 3.2.

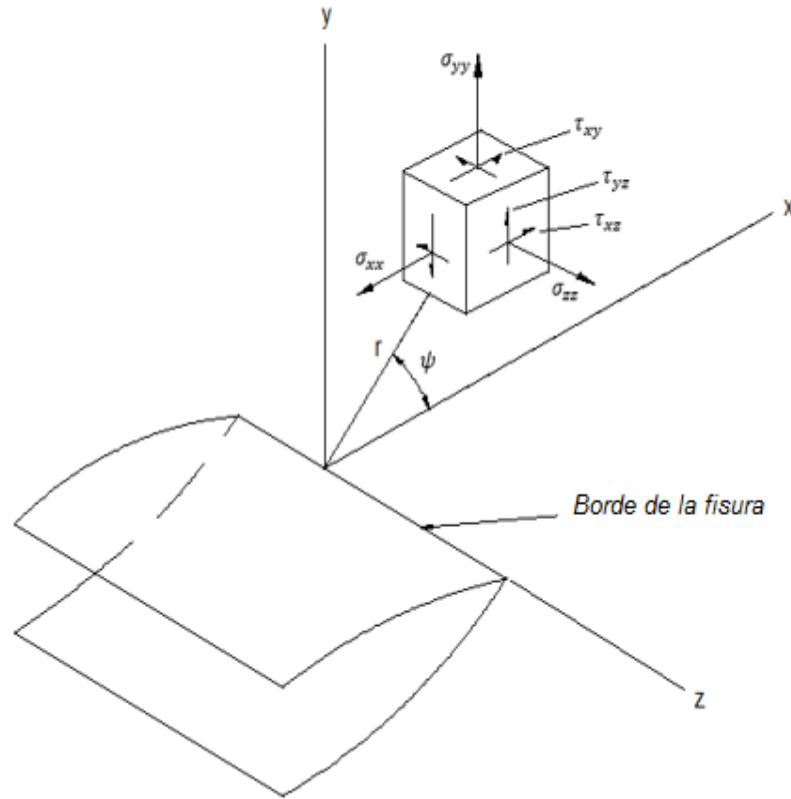


Figura 3.2: Sistema de coordenadas en el borde de fisura, y componentes tensionales en el punto sólido infinitesimal [11].

El FIT da información de la magnitud de las tensiones presentes en el borde de la fisura, es directamente proporcional a la tensión (la cual nos da información de las cargas externas a nuestro sistema mecánico) y a la raíz de la profundidad de la fisura. En la ecuación 3.1.8 [8, 12] se puede observar su expresión más común.

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.1.8)$$

Pudiéndose reescribir como:

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (3.1.8.1)$$

Donde F_I es un factor adimensional que depende de la forma de la fisura, al cual se le conoce también como FIT adimensionalizado; σ es la tensión generada por las cargas externas presentes en el sólido; a es la profundidad de fisura.

El FIT tiene unidades de presión por la raíz de la longitud $Pa * \sqrt{m}$. En el Sistema Internacional sus unidades son $Kg * m^{-\frac{1}{2}} * s^{-2}$. En la Mecánica de la fractura sus unidades suelen ser $MPa * \sqrt{m}$.

Si el FIT alcanza un valor crítico, llamado tenacidad de la fractura (K_{IC} , el cual es una propiedad intrínseca del material), la fisura se empezará a propagar. Algebraicamente, el criterio quedaría como puede verse en la ecuación 3.1.9.

$$K_I \geq K_{IC} \quad (3.1.9)$$

3.1.2. PLANTEAMIENTO GLOBAL DE LA FRACTURA

A continuación, una vez terminado el estudio del planteamiento local, se va a proceder a hacer un análisis del planteamiento global de la fractura, el cual tiene un enfoque energético.

Griffith [1] e Irwin [2] utilizaban una ecuación íntimamente relacionada con en el Primer Principio de la Termodinámica, el cual se basa en la conservación de la energía, tal y como se puede apreciar en la ecuación 3.1.10.

$$G = \frac{dF}{da} - \frac{dU}{da} \quad (3.1.10)$$

Donde F es el trabajo que realizan las cargas externas; U es la energía liberada por la deformación; a es la profundidad de fisura en el sólido; G es la tasa de liberación de energía. Esta función es posible calcularla, prestando atención a una serie de parámetros, como lo son la profundidad de fisura, la geometría del elemento mecánico y la tensión.

Por otra parte, es necesario introducir otro parámetro, el cual es conocido como R , definido como la resistencia que opone el sólido ante el avance de la grieta. Hay que destacar que, a diferencia de G , R es una propiedad que viene determinada

experimentalmente, no es posible calcularla con exactitud. En la ecuación 3.1.11 se expondrá uno de los principales criterios energéticos para que se pueda dar la propagación de la fisura, el cual nos indicará que la tasa de liberación de energía debe superar o igualar la resistencia al avance de la grieta, sólo así será posible su propagación.

$$G \geq R \quad (3.1.11)$$

Es importante destacar la existencia de una relación entre el FIT y la tasa de liberación de energía, G , la cual se presenta en la ecuación 3.1.12 [13].

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3.1.12)$$

Donde se tiene que E' es un término análogo al módulo de elasticidad, ya que toma los valores: $E' = E$ en hipótesis de tensión plana, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ bajo hipótesis de deformación plana.

En última estancia, es necesario resaltar una coincidencia existente en el MFLE, la cual es que la tasa de liberación de energía, G , tiende ser igual a la integral J [5].

3.2. COMPORTAMIENTO DE EJES CON FISURAS

3.2.1. TIPOLOGÍA DE LA FISURA EN EJES ROTATIVOS

Existen diferentes tipos de formas de fisuras, siendo las más comunes las fisuras de frente recto [14], de frente semielíptico [10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] y de frente semicircular [23, 24], como se puede observar en la figura 3.3. No obstante, las fisuras suelen tener forma semielíptica en la mayoría de los casos en ejes.

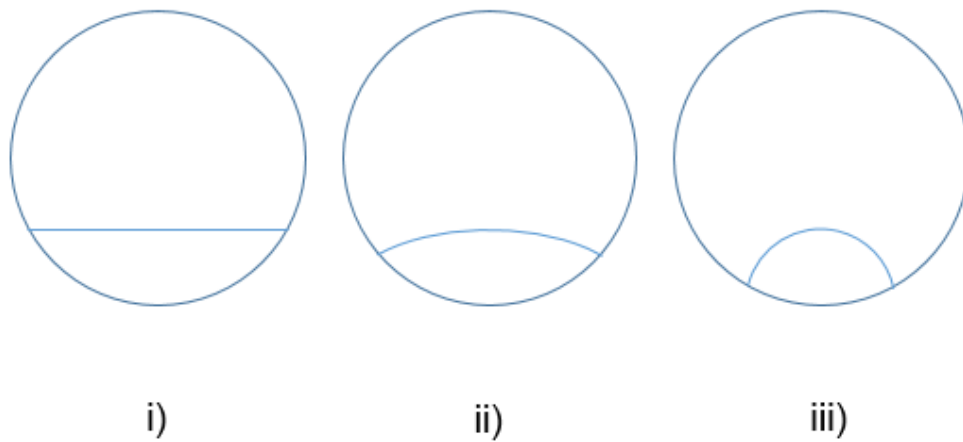


Figura 3.3: Tipos de fisuras.

Donde se tiene: i) fisura recta; ii) fisura semielíptica; iii) fisura semicircular.

Para la clasificación del tipo de curvatura, de las fisuras semielípticas y semicirculares, se tomará en cuenta el siguiente criterio se pueden diferenciar en fisuras convexas (hay constancia de numerosos trabajos del estudio del FIT en el frente de fisura para esta tipología de fisura) [15, 18, 19, 20, 21, 22], y fisuras cóncavas (se tiene constancia de pocos trabajos de investigación para el estudio del FIT en el borde de fisura para esta tipología de fisura) [10, 16, 17].

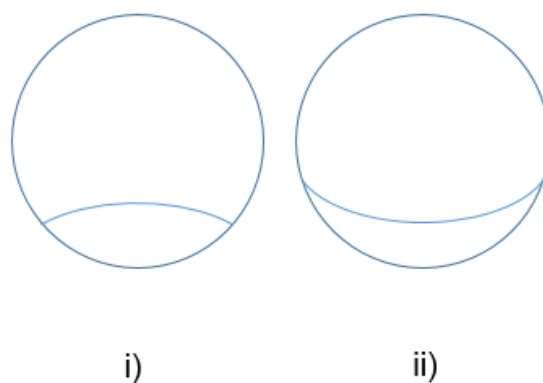


Figura 3.4: Tipos de concavidad en fisuras.

En la figura 3.4 se pueden apreciar ambos tipos de fisura. En la figura 3.4 (i) se puede ver una fisura convexa, mientras que en la figura 3.4 (ii) se puede apreciar una fisura cóncava. Las fisuras estudiadas en este proyecto son cóncavas.

La mayoría de los estudios realizados se han centrado en las fisuras semielípticas convexas [16, 18, 19, 20, 21, 22], no obstante, también se han encontrado en la literatura algunos trabajos con fisuras semielípticas cóncavas [10, 16, 17].

En la figura 3.5 se puede ver la sección transversal de un eje que presenta una fisura de frente semielíptico convexo. Se observa que el centro de la elipse se encuentra situado en el punto inferior de la sección del eje.

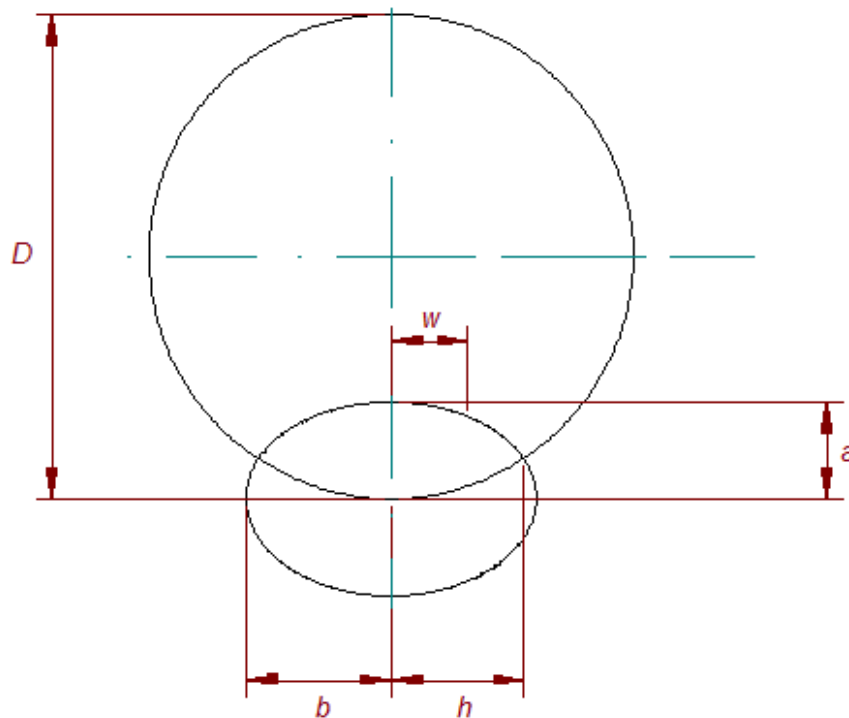


Figura 3.5: Dibujo acotado de la sección fisurada del eje (fisura convexa).

Donde se tiene: D diámetro del eje; a y b son el semieje menor y el semieje mayor respectivamente, de la fisura convexa; h es la distancia del centro de la fisura al punto más periférico de la misma; w es la distancia del centro de la fisura a un punto arbitrario de la misma.

A su vez, En la figura 3.6 se puede ver la sección transversal de un eje que presenta una fisura de frente semielíptico cóncavo. Se observa que el centro de la elipse se encuentra situado en el punto superior de la sección del eje.

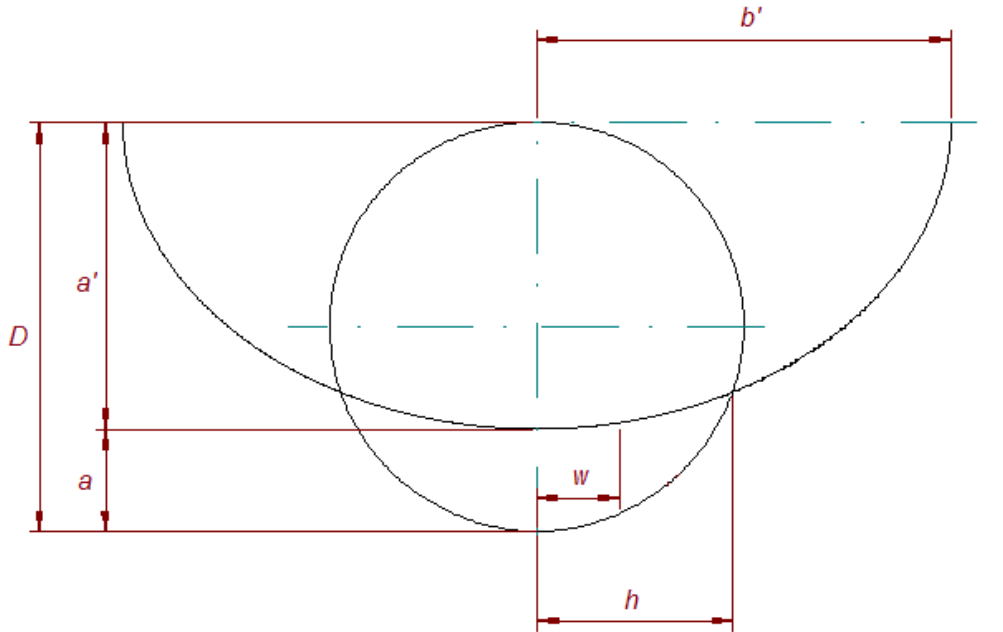


Figura 3.6: Dibujo acotado de la sección fisurada del eje (fisura cóncava).

Donde se tiene: D diámetro del eje; a' y b' son los semiejes menor y el semieje mayor de la fisura cóncava; h es la distancia del centro de la fisura al punto más periférico de la misma; w es la distancia del centro de la fisura a un punto arbitrario de la misma.

Los parámetros característicos de las fisuras semielípticas son:

- Profundidad diametral relativa de la fisura, α .

$$\alpha = \frac{a}{D} \quad (3.2.1)$$

- Factor de curvatura del borde de fisura, β .

$$\beta = \frac{a}{b} \quad (\text{fisura convexa}) \quad (3.2.2)$$

$$\beta' = \frac{a'}{b'} \quad (\text{fisura cóncava}) \quad (3.2.3)$$

Donde se abarca desde $\beta = 0,00$ (fisura recta) hasta $\beta = 1,00$ (fisura semicircular), pasando por estados intermedios, donde la fisura es semielíptica.

- Posición relativa en el frente de fisura, γ .

$$\gamma = \frac{w}{h} \quad (3.2.4)$$

El ángulo de giro, θ , estará comprendido entre 0 y 360 grados, al tratarse de un ciclo completo. En la figura 3.7 se puede visualizar el sistema de referencia para dicho giro.

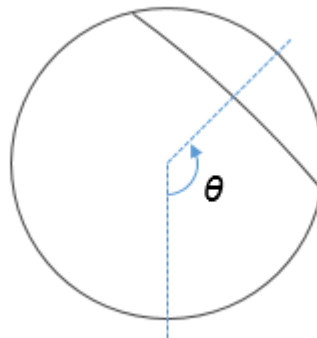


Figura 3.7: Sistema de referencia en la rotación del eje.

En la figura 3.8 se puede visualizar la sección fisurada del eje rotatorio en varias posiciones angulares.

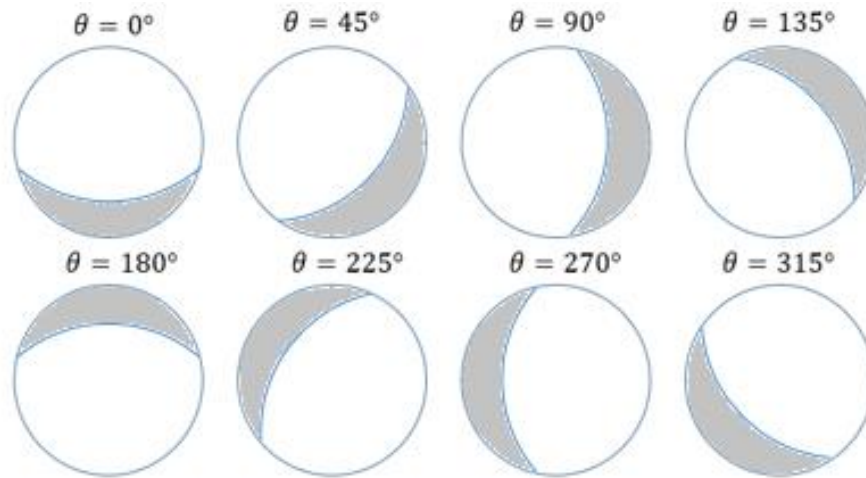


Figura 3.8: Posiciones angulares del eje fisurado.

3.2.2. APERTURA Y CIERRE DE FISURA

Un fenómeno de vital trascendencia es la apertura y cierre de la fisura durante un ciclo del eje (también llamado “breathing crack”).

Existen diferentes modelos de cierre y apertura de fisura:

- **Modelos de fisura abierta:** la fisura permanece totalmente abierta durante todo el ciclo (siempre posee el valor 1 en todo el ciclo) [25, 26, 27]. En la figura 3.9 se puede ver su gráfica correspondiente.

$$f(\theta) = 1 \quad (3.2.5)$$

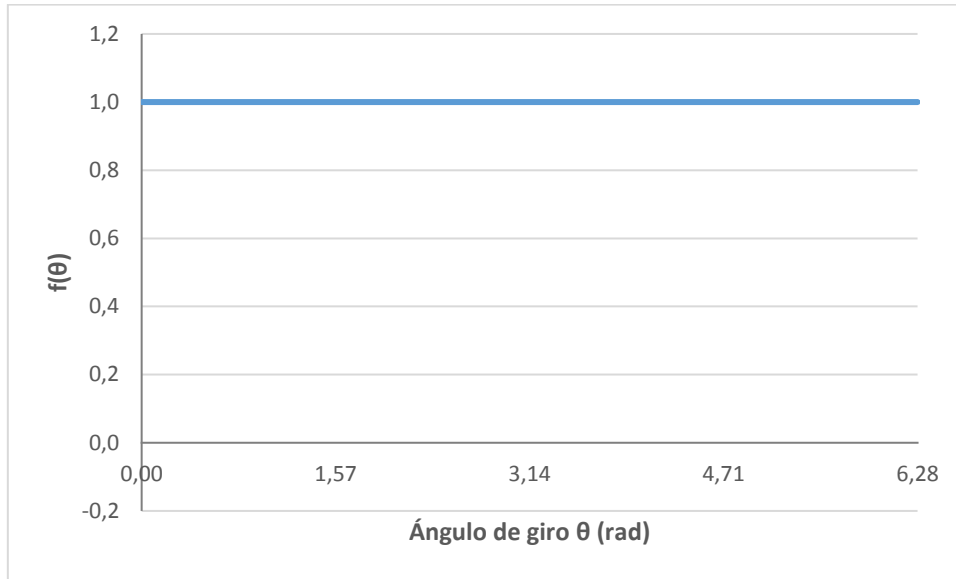


Figura 3.9: Función de apertura y cierre para el modelo de fisura abierta [25, 26, 27].

- **Modelos de fisura abierta o cerrada:** la fisura está totalmente abierta o totalmente cerrada, sin considerar la apertura o cierre parciales de la misma. Gasch [28, 29] propuso un modelo matemático, en el cual se obtenía el valor 1 cuando la fisura se encuentra completamente abierta, y 0 cuando se encuentra completamente cerrada, pasando de un estado a otro mediante transiciones bruscas. La función de Gasch [28, 29] propuesta para dicho modelo es la siguiente:

$$f(\theta) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \frac{1}{7} \cos 7\theta + \frac{1}{9} \cos 9\theta - \frac{1}{11} \cos 11\theta + \frac{1}{13} \cos 13\theta - \frac{1}{15} \cos 15\theta + \frac{1}{17} \cos 17\theta - \dots \right) \quad (3.2.6)$$

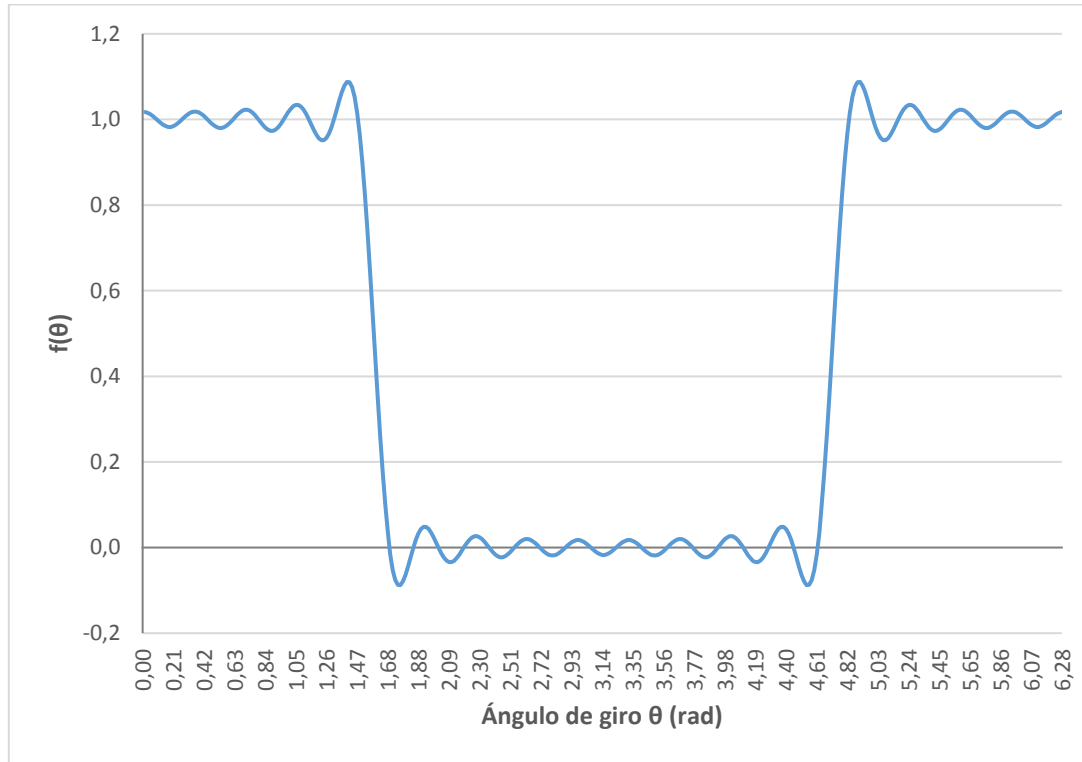


Figura 3.10: Función de apertura y cierre propuesta por Gasch [28, 29].

- **Modelos de cierre y apertura gradual de la fisura:** la fisura se abre y cierra parcialmente durante el giro del eje, teniendo en cuenta así los estados intermedios entre el cierre total y la apertura total de la fisura. Mayes y Davies [30] propusieron un modelo matemático, basado en una función cosenoidal, como se puede ver en la ecuación 3.2.7. Este modelo representa fielmente el comportamiento de fisuras para valores de α (profundidad relativa de fisura) superiores a 0,25. En la figura 3.11 se puede observar dicho modelo.

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \quad (3.2.7)$$

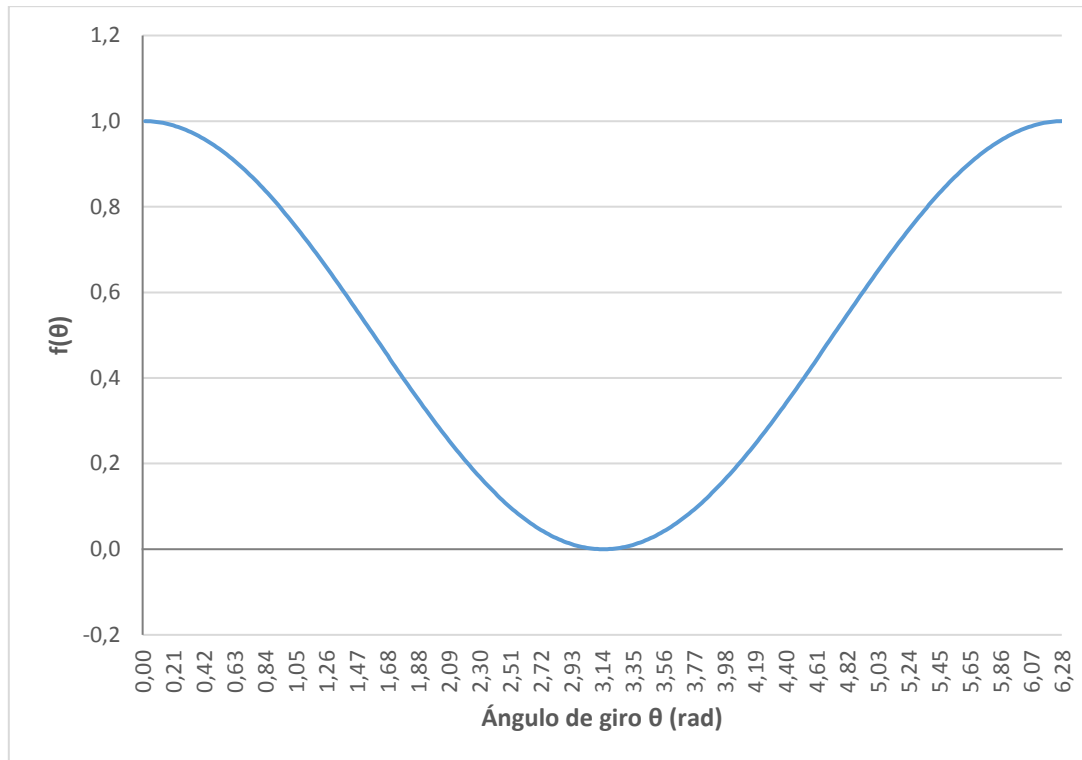


Figura 3.11: Función de apertura y cierre propuesta por Mayes y Davies [30].

Este proyecto se centrará en el Modelo de apertura de Mayes y Davies [30], de apertura y cierre gradual.

Hubo una serie de investigadores, como A. K. Darpe [31], que hicieron un estudio sobre la flexibilidad de un eje fisurado, basándose en el modelo matemático de apertura y cierre gradual de la fisura propuesto por Mayes y Davies [30]. En la figura 3.12 se pueden observar las zonas abiertas y cerradas (las cuales son separadas por la Línea de cierre de fisura, “LFC”) para diferentes posiciones angulares.

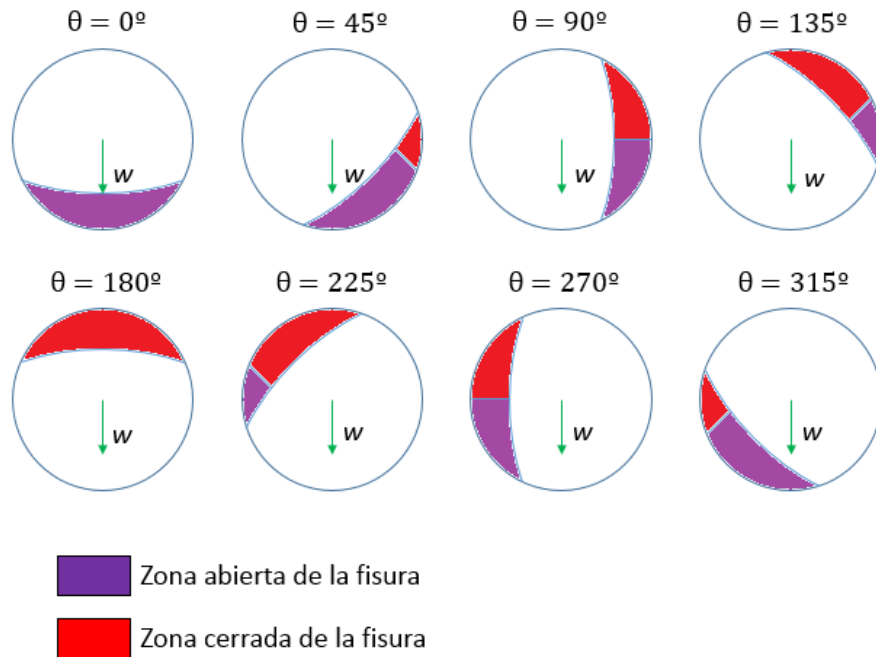


Figura 3.12: Línea de cierre de fisura para diferentes instantes del ciclo del eje (modelo Darpe [31]).

Donde W es el peso propio del eje; y ρ y ζ son las coordenadas que forman el eje de referencia anclado al eje cilíndrico rotativo.

Es importante destacar que, en la zona abierta de la fisura, el FIT es positivo, lo cual permite que se propague la fisura. En la zona cerrada de la fisura, el FIT es negativo o nulo, lo cual impide la propagación de grieta en dichos puntos. Los FIT adimensionalizados negativos serán considerados nulos (con valor de cero) [11].

3.3. CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN EJES FISURADOS

Existen varias maneras para la obtención de los factores de intensidad de tensiones en ejes rotatorios con fisuras semi-elípticas: experimentales, numéricos o analíticos.

Mediante los métodos experimentales, obtenemos mediante métodos empíricos diferentes medidas de parámetros mecánicos, como pueden ser campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones. Los métodos más utilizados son la fotoelasticidad y la fractografía.

La fotoelasticidad [32, 33], la cual se basa en usar la luz para que forme dibujos y contornos sobre sólidos isótropos, continuos y transparentes (en caso de no ser transparentes se emplea una resina birrefringente, la cual cubrirá la pieza), los cuales están sometidos a esfuerzos. Estos contornos se forman debido a la variación del índice de refracción del elemento mecánico estudiado, pudiéndose observar varios contornos coloreados, de manera muy similar al MEF (Método de elementos finitos).

La fractografía se basa en el estudio de las fisuras por medio de microscopía electrónica, lo que permite estudiar rasgos característicos de la fisura (profundidad y longitud del borde de fisura). Se va estudiando la variación de la forma de la grieta bajo diferentes cargas, lo cual da información de los valores del FIT. En el estudio de la fractografía destacaron varios científicos, entre ellos Forman y Shivakumar [23].

De entre los métodos numéricos destaca el MEF (Método de los Elementos Finitos) [22, 34, 35], el cual es indispensable para el diseño mecánico. Otros medios menos utilizados son, por ejemplo, el método de elementos de contorno (MEC). Algunos estudios numéricos se utilizaron para obtener diferentes expresiones del FIT. Dichas expresiones del FIT pueden clasificarse como se muestra a continuación:

- Expresiones del FIT en función del factor de forma β y la profundidad relativa de fisura α :

$$F_I = F_I(\alpha, \beta) \quad (3.3.1)$$

Expresión utilizada para obtener el FIT en un punto específico del borde de fisura, como puede ser un punto central o puntos de la periferia [14, 34, 36].

- Expresiones del FIT en función del factor de forma β , la profundidad relativa de fisura α y de la posición relativa en el borde de fisura γ :

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.3.2)$$

Esta expresión facilita el cálculo del FIT en cualquier punto del borde de fisura, profundidad relativa y forma de fisura [22, 35].

- Expresiones del FIT en función del factor de forma β , la profundidad relativa de fisura α , de la posición relativa en el borde de fisura γ , y de la posición angular θ durante un ciclo del eje rotativo:

$$F_I = F_I(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \quad (3.3.3)$$

Con esta expresión es posible conocer los valores del FIT para cualquier profundidad relativa, factor de forma de la fisura, posición relativa en el borde de fisura y posición angular durante una vuelta del eje [11].

Finalmente, han sido utilizados diferentes tipos de métodos analíticos para la obtención del FIT, de entre ellos es importante mencionar el análisis de la integral J [5] y otros que están basados en expresiones clásicas de la MFLE.

4. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1. INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos Finitos (MEF) ha tomado gran importancia en la Ingeniería durante las últimas décadas, puesto que ha facilitado y simplificado la labor del diseño mecánico.

El MEF es un método numérico, el cual consiste en la simulación y simplificación de sistemas físicos, mediante la resolución y/o aproximación hacia las ecuaciones diferenciales que gobiernan el mismo. El MEF ha tomado vital importancia en la simulación computacional [37], creándose numerosos programas de *software* de elementos finitos, como pueden ser ANSYS, ABAQUS, etc. Dichos programas nos resuelven problemas físicos en un periodo de tiempo que antaño parecería “impensable”, ya que nos evitan la ardua tarea de la resolución de complejas ecuaciones diferenciales [37].

Otra enorme ventaja que nos ofrecen estos programas es el poder simular prototipos, en lugar de construirlos, lo cual ahorra muchos recursos (tiempo y costes). No obstante los prototipos físicos siguen siendo necesarios, pero en menor medida. Los factores trascendentales presentes en los análisis numéricos son: el correcto uso del programa de elementos finitos, la geometría del problema a estudio y las diferentes condiciones de contorno presentes. Dichos factores declinarán la balanza a la hora de simular un problema o construir un prototipo [37].

4.2. CONCEPTOS BÁSICOS

El método se basa en el diseño de un medio continuo para posteriormente ser simplificado y aproximado a un modelo discreto. Dicho modelo será simplificado a un elemento unidimensional, bidimensional o tridimensional, según su geometría, también serán simplificados los grados de libertad del problema real.

Dicho diseño estará dividido en un número finito de elementos, los cuales son divisiones del diseño planteado. Los elementos están separados entre sí mediante nodos, los cuales son los puntos sobre los cuales el programa de elementos finitos

hará los cálculos. Es importante destacar las funciones de interpolación, presentes en el MEF, las cuales nos pueden interpolar resultados entre nodos (en el seno de un elemento). Cada elemento presenta sus características mecánicas y por ende, sus ecuaciones de comportamiento. El MEF planteará ecuaciones lineales y/o no lineales, las cuales tienen una aproximación bastante precisa con respecto al comportamiento real.

Los modelos se componen de tres entidades, los cuales se pueden visualizar en la figura 4.1 [37]:

- **Dominio:** se define como el espacio geométrico donde se plantea el problema físico que se desea estudiar.
- **Condiciones de contorno del problema:** se trata de valores fijados para diferentes variables, en ciertas localizaciones del dominio, que influirán en el desarrollo del análisis y, por ende, en los resultados finales. En el problema planteado en este proyecto, las condiciones de contorno son las cargas simétricas de flexión y el impedimento de los desplazamientos radiales en el perímetro de las secciones circulares de los extremos del eje.
- **Variables o incógnitas a estudiar:** son el objetivo final de nuestro análisis, a las cuales tendremos acceso una vez finalice el análisis de elementos finitos. Algunos ejemplos pueden ser fuerzas, módulos de rigidez, temperaturas, tensiones, etc. En nuestro caso serán los Factores de Intensidad o Concentración de Tensiones (FIT).

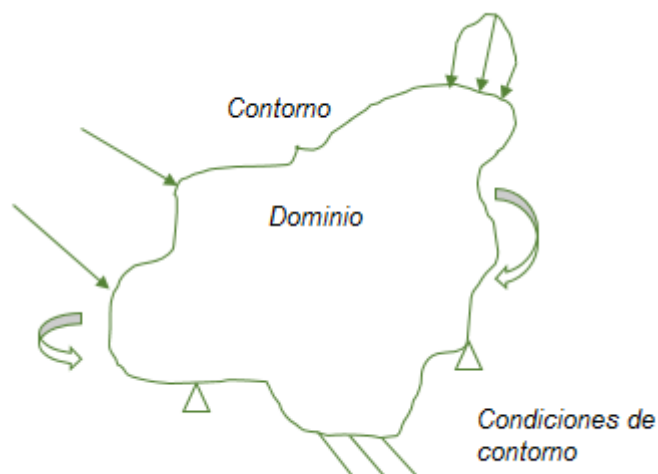


Figura 4.1: Esquema de un modelo físico [37].

Existen tres etapas para la resolución de un problema en un *software* de elementos finitos. Los cuales son:



- **Pre-proceso:** en esta fase se diseña el modelo físico, se desarrollará el dominio y las diferentes condiciones de contorno del sistema.
 - ✓ Diseño de las diferentes geometrías del modelo del problema físico.
 - ✓ Definición de las propiedades de los tipos de materiales que puedan presentarse en dicho modelo.
 - ✓ Introducción de sistemas de cargas o esfuerzos sobre el sistema y limitaciones o condiciones de contorno.
 - ✓ Discretización del modelo continuo y mallado del dominio.
- **Procesamiento:** esta es una fase muy importante, ya que se realizan todas las operaciones y cálculos, para así poder obtener a posteriori las soluciones del problema planteado.
 - ✓ Identificación y selección del tipo de cálculo que se realizará.
 - ✓ Ajuste de los parámetros del análisis, como el número de iteraciones, intervalos temporales, etc.
 - ✓ Traslado de los sistemas de cargas al modelo, creación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez del sólido, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución del problema.
- **Post-proceso:** en esta última fase, se presentan los resultados de la solución de forma gráfica y numérica. Mediante la observación y análisis de los datos obtenidos se pueden detectar posibles errores en el cálculo, así como obtener datos relacionados mediante operaciones con las soluciones (por ejemplo, la adimensionalización del FIT).

4.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON “ABAQUS 6.11 ®”

4.3.1. DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE ABAQUS

Abaqus [38] es un *software* utilizado en varios campos de la ingeniería, como en el sector industrial, biomédico, aeroespacial, nuclear, automoción, para la resolución de problemas complejos.

Abaqus está compuesto por una serie de subprogramas o productos, los cuales son Abaqus/CAE, Abaqus/Standard, Abaqus/Explicit, Abaqus Viewer, Abaqus/CFD, Abaqus/Electromagnetic [38].

Abaqus/CAE es un entorno interactivo, de fácil comprensión, coherente y productivo, cuya interfaz gráfica permite la creación, edición, monitorización, diagnóstico y visualización de los modelos creados. Está implementado por varios módulos, que hacen más fácil la labor de creación de modelos. También nos permite la opción de importar otros diseños de programas de CAD u otros programas de modelización en elementos finitos.

Abaqus/Standard se emplea para la resolución, mediante un análisis implícito, de problemas estáticos y dinámicos a baja velocidad, con la posibilidad de incluir en los modelos no linealidades en el material. Está soportado dentro del entorno Abaqus/CAE para todo pre-procesamiento y post-procesamiento del modelo.

Abaqus/Explicit utiliza un análisis explícito para problemas dinámicos a altas velocidades, altas deformaciones, tal como el análisis de una colisión. Abaqus/CAE también abarca este módulo para las etapas de pre-procesamiento y post-procesamiento.

Abaqus Viewer permite la visualización de los resultados del análisis del modelo. Está integrado en Abaqus/CAE en la etapa de post-procesamiento.

Abaqus/CFD sirve para la resolución de modelos CFD (Computer Fluid Dynamics, o en español, Dinámica de Fluidos Computacional). Comprende simulaciones de carácter mecánico y térmico.

Abaqus/Electromagnetic es utilizado para la resolución de problemas computacionales avanzados de electromagnetismo.

En la figura 4.2 se presenta un diagrama de bloques, que representa las tres etapas desarrolladas del análisis (pre-proceso, análisis y post-proceso), el cual realiza el programa (en este caso se trata del Abaqus 6.11).

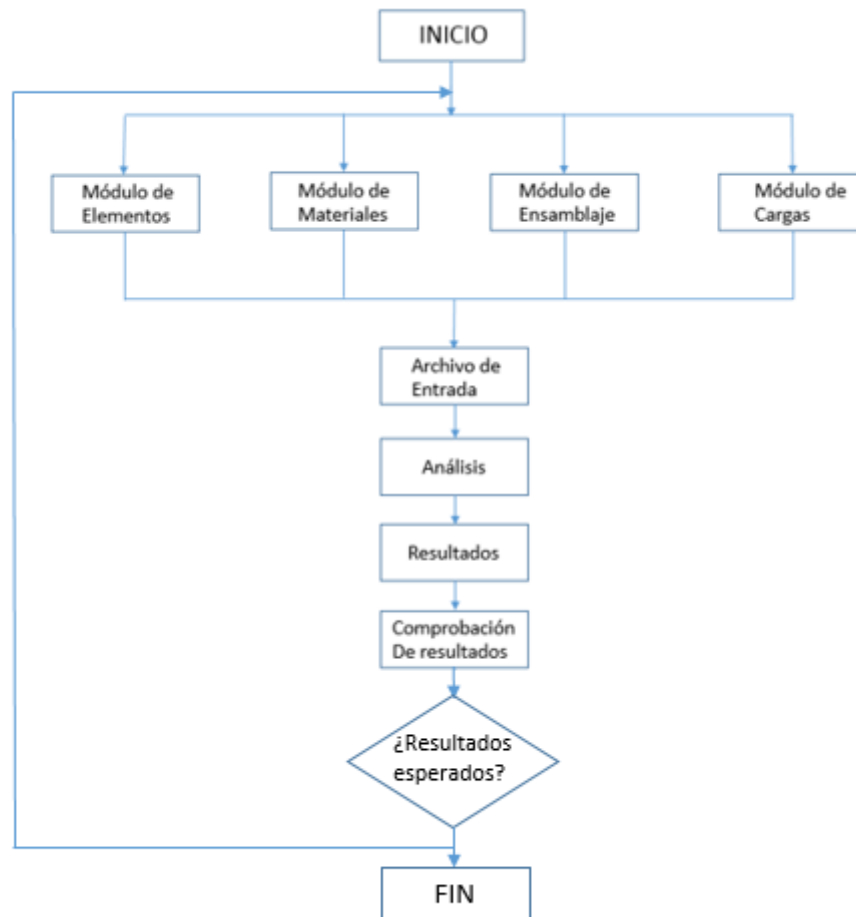


Figura 4.2: Diagrama de bloques del análisis de un modelo.

4.3.2. MÓDULOS DE ABAQUS PARA EL DISEÑO DE LOS MODELOS

Abaqus/CAE posee diferentes módulos [39], los cuales son:



- ✓ **Módulo Part:** se define geométricamente el modelo, mediante diferentes opciones avanzadas de diseño propias de un programa de CAD, lo cual permite la creación de geometrías complejas. Es necesario tener en cuenta las condiciones de contorno y mallado del modelo a la hora de dibujar su geometría (por ejemplo, quizás una geometría muy compleja necesite muchos más nodos de los que se tienen pensados).
- ✓ **Módulo Property:** se definen las propiedades mecánicas de los materiales utilizados en el modelo, y se asignan a las diferentes piezas, partes o particiones.
- ✓ **Módulo Assembly:** sirve para ensamblar varias partes que necesitan ser ensambladas. También pueden hacerse particiones para facilitar posteriormente puntos de interés o zonas con diferente mallado.
- ✓ **Módulo Step:** se selecciona el tipo de análisis que se va a llevar a cabo, a su vez que permite dividir el análisis en secuencias de varias etapas, pudiendo controlar los intervalos de tiempo e iteraciones de cada una de las mismas. Es un modo óptimo para controlar los procesos y cambios en el sistema, sujeto a variaciones de las condiciones de contorno (por ejemplo, el estudio de un choque de un automóvil en el momento del impacto e instantes posteriores necesitan de análisis diferentes).
- ✓ **Módulo Interaction:** en los modelos puede haber interacciones o contactos entre varias partes, ya sea rozamiento, rodadura pura, contacto normal, partes solidarias, etc.
- ✓ **Módulo Load:** este módulo permite introducir cargas y condiciones de contorno en el sistema, ya sean cargas repartidas o puntuales, impedimento de movimientos, velocidades, etc.
- ✓ **Módulo Mesh:** sirve para generar mallas (discretización del modelo en un número finito de elementos) en nuestro modelo, las cuales pueden ser de diferentes tipologías. Existen opciones de refinado y verificación de malla, permitiendo cambiar los tamaños de elementos, el número de elementos por segmento, etc.
- ✓ **Módulo Job:** este módulo nos permite crear un trabajo de análisis (el cual es un archivo donde se recogen todos los datos de entrada creados en los módulos anteriores). Este módulo, además, nos va imprimiendo por pantalla los mensajes de desarrollo del análisis.
- ✓ **Módulo Visualization:** se pueden visualizar los resultados del análisis mediante bocetos, mapas de contornos y colores, imágenes deformadas, tablas, vídeos de desarrollo del análisis, etc.

Cabe destacar que, Durante la etapa de análisis las únicas interacciones son posibles advertencias del programa monitoreadas. Una vez termina el análisis y, tras analizar los resultados expuestos en el módulo de visualización, es importante analizar la validez de dichos resultados, puesto que pueden dar información acerca de correcto o incorrecto diseño del modelo, o también que simplemente las soluciones no se acercan al comportamiento esperado y, por tanto, el problema necesitaría un análisis más segmentado o por otros medios ya que tiene mayor complejidad de la aparente.

4.3.3. ARCHIVOS DE ABAQUS IMPORTANTES EN EL ANÁLISIS

Es importante hacer un repaso de los archivos más trascendentes de Abaqus [39], los cuales son los siguientes:

- **Archivos .cae (computer aided engineering):** contienen toda la información del modelo (geometría, condiciones de contorno y carga, interacciones, mallado), la cual se enviará a Abaqus/Standard y/o Abaqus/Explicit para ser analizada y poder calcular el modelo.
- **Archivos .inp (input file):** son archivos que se generan al iniciar el análisis, los cuales son enviados a Abaqus/Standard y/o Abaqus/Explicit.
- **Archivos .odb (output database):** contienen la solución del modelo, donde se pueden obtener datos mediante representaciones gráficas, tablas de valores, etc. Estos archivos se crean al iniciar el análisis, y van cambiando durante el mismo (su extensión va aumentando a medida que el modelo se va calculando).
- **Archivos .rpt (reported table):** estos archivos son aparecen cuando se crea una tabla de valores de una o varias variables. Son archivos de texto, de los que se pueden extraer los datos para después operar con ellos.

5. MODELO NUMÉRICO

5.1. MODELO GEOMÉTRICO

Con el propósito de simular el problema del eje rotatorio fisurado, y así obtener el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), se ha propuesto un modelo numérico tridimensional. Se ha analizado el valor del FIT en el frente de fisura, en función de la profundidad y la forma de la misma y el ángulo de giro del eje.

5.1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se ha considerado un eje rotatorio fisurado en la sección central, que se encuentra sometido a dos cargas simétricas respecto a la misma y biapoyado. En la figura 5.1 se puede hacer una visualización del mismo.

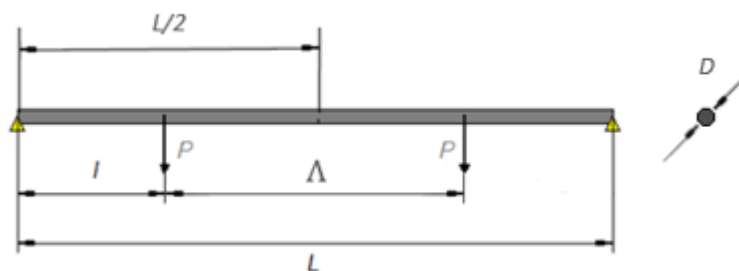


Figura 5.1: Esquema del eje rotatorio fisurado.

Donde P es una carga puntual, l es la longitud del apoyo a la carga P , Λ es la distancia entre cargas puntuales, L es la longitud del eje, D es el diámetro del eje.

En la tabla 5.1.1 se pueden ver los valores de las cotas y las cargas del eje.

Tabla 5.1.1: Cotas y cargas en el eje.

PARÁMETRO	VALOR NUMÉRICO	UNIDADES
L (longitud del eje)	900	mm
Λ (longitud entre cargas)	454	mm
l (distancia carga-apoyo)	223	mm
P (carga aplicada)	100	N
D (diámetro del eje)	20	mm

El eje está hecho de aluminio, cuyas propiedades se exponen en la tabla 5.1.2.

Tabla 5.1.2: Propiedades del aluminio.

PROPIEDAD	VALOR NUMÉRICO	UNIDADES
E (Módulo de Young)	72	GPa
ρ (Densidad)	2800	Kg/m ³
ν (Coeficiente de Poisson)	0,33	Adimensional

Se han considerado los siguientes valores de los parámetros:

- Profundidad relativa de fisura (α), cuyos valores están comprendidos desde 0,1 hasta 0,5, con intervalos de 0,1 entre valores.
- Factor de forma de la fisura (β), cuyos valores van desde 0 hasta 1, con intervalos de 0,25 entre valores.

Combinando los valores a estudiar de α y β se obtienen 25 casos diferentes, como se puede ver en la figura 5.2.

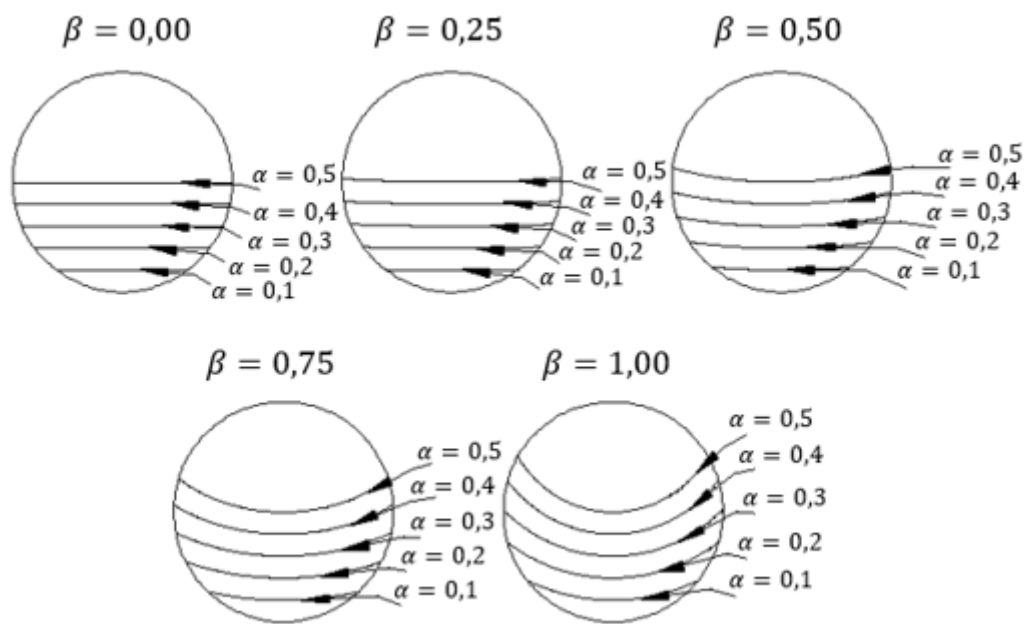


Figura 5.2: Diferentes formas de fisura con sus profundidades relativas.

- Posición relativa en el borde de fisura (γ), cuyos valores van desde -0,83 hasta 0,83, con intervalos entre valores de aproximadamente 0,16. En la figura 5.3 se pueden visualizar las diferentes posiciones relativas que se estudiarán.

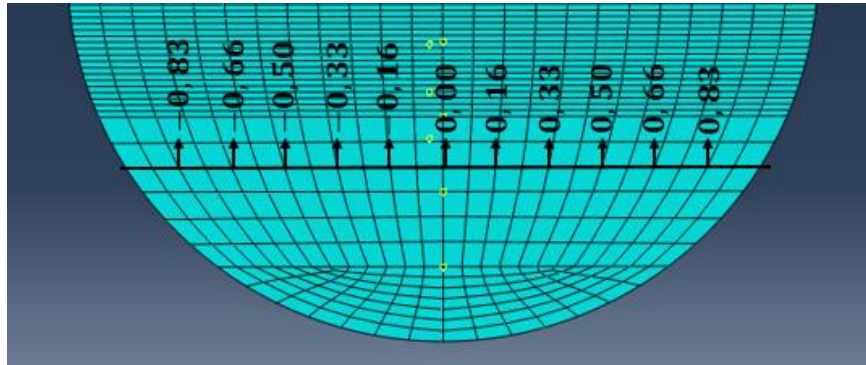


Figura 5.3: Posiciones relativas en el frente de fisura.

- Ángulo de rotación (θ) cuyos valores varían desde 0° hasta 180° en intervalos de 5° . Para hacer este estudio se ha considerado simetría en los resultados en el rango de 180° hasta 360° .

El FIT dependerá de estos cuatro parámetros. En la figura 5.4 se pueden visualizar conceptualmente los cuatro parámetros anteriores y la variación del FIT según varíen los mismos.

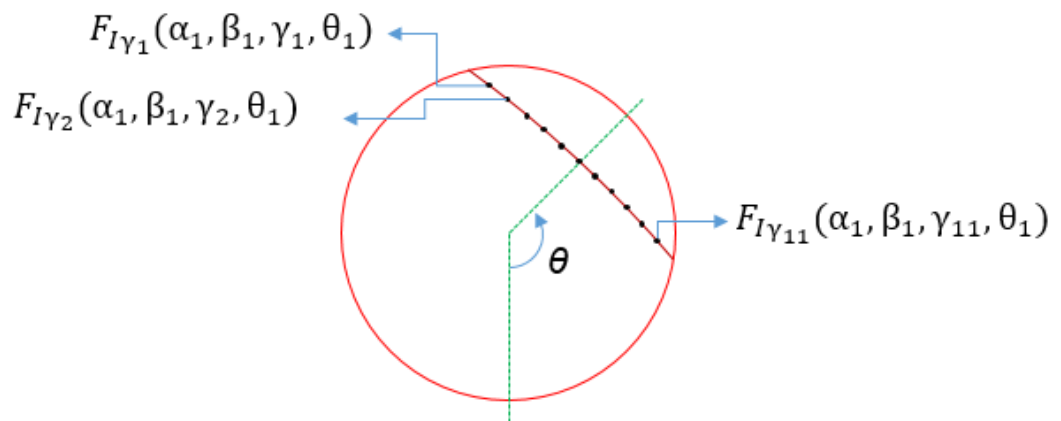


Figura 5.4: Esquema del eje fisurado con sus diferentes parámetros característicos e influencia en el valor del FIT.

Por consiguiente, combinando los parámetros α , β y θ , se obtiene un total de 900 casos (5 valores de α , 5 valores de β , y 36 valores de θ), en cada caso se sacará

el FIT para cada uno de los diferentes valores de γ (siendo 11 dichos valores, los cuales nos indican 11 puntos de estudio en el frente de fisura).

5.2. MODELO NUMÉRICO

En este apartado se describirá el modelo numérico tridimensional, que se realizará mediante el *software* comercial de elementos finitos ABAQUS/CAE [38,39] versión 6.11.

5.2.1. GEOMETRÍA DEL MODELO

Para la realización de un correcto diseño, el eje debe tratarse como dos ejes idénticos unidos en la sección central, de tal manera que luego pueda simularse en la sección central la fisura. Para ello, en el módulo *Part* se diseñarán dos ejes circulares idénticos, de 20 mm de diámetro y 450 mm de longitud cada uno.

A cada una de estas dos mitades se le hacen particiones geométricas, las cuales son transversales y longitudinales. Estas particiones facilitarán el mallado, los puntos para la aplicación de las cargas, las regiones de interés y la simulación de la zona de fisura.

Se realizarán dos particiones transversales en cada mitad del eje, la partición *AA* se encuentra a 223 mm del extremo que posteriormente estará restringido de desplazamiento, sirve para tener una referencia para colocar la carga puntual sobre dicha sección. Se realizará una partición *BB* a 4 mm de la sección donde se encontrará la fisura (extremo opuesto al extremo restringido del semieje), la cual sirve para hacer la malla más fina en las proximidades de la sección fisurada. Dichas particiones se pueden visualizar en la figura 5.5.

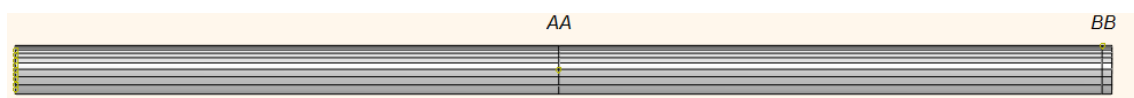


Figura 5.5: Particiones transversales del semieje en ABAQUS/CAE.

En cuanto a las particiones longitudinales, hay una por cada combinación de valores de α y de β , no obstante, en un semieje todas las particiones deben tener el mismo factor de forma β . En la figura 5.6 se pueden visualizar todas las particiones longitudinales que se realizarán.

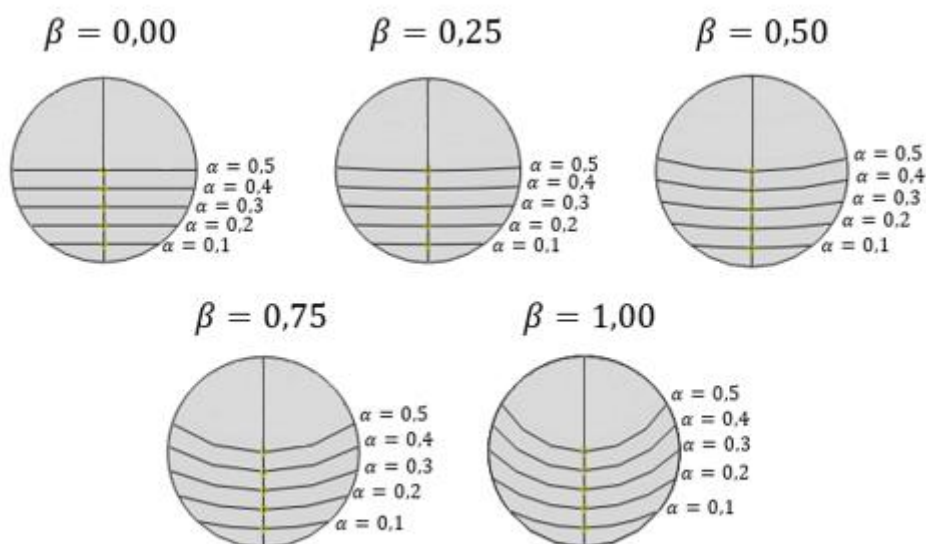


Figura 5.6: Secciones longitudinales del eje en ABAQUS/CAE.

5.2.2. MATERIAL Y SUS PROPIEDADES

A través del módulo *Property* se pueden crear los diferentes materiales de los que estará compuesto el modelo, así como su asignación a las diferentes partes del diseño geométrico. En este caso el material será aluminio (véase la tabla 5.1.2), y las dos partes del eje (los dos semiejes) tienen el mismo material.

5.2.3. ENSAMBLAJE DE LAS PARTES DEL MODELO

El módulo *Assembly* permitirá juntar los dos semiejes, para así tener el eje completo. Anteriormente, en el módulo *Part* se diseñó un semieje con sus particiones, y después se copió para tener los dos semiejes. En el módulo de ensamblaje debe

crearse una instancia, en la cual se juntarán los ejes, modificando las posiciones relativas de ambos semiejes (mediante rotaciones y traslaciones). El resultado final puede apreciarse en la Figura 5.7.

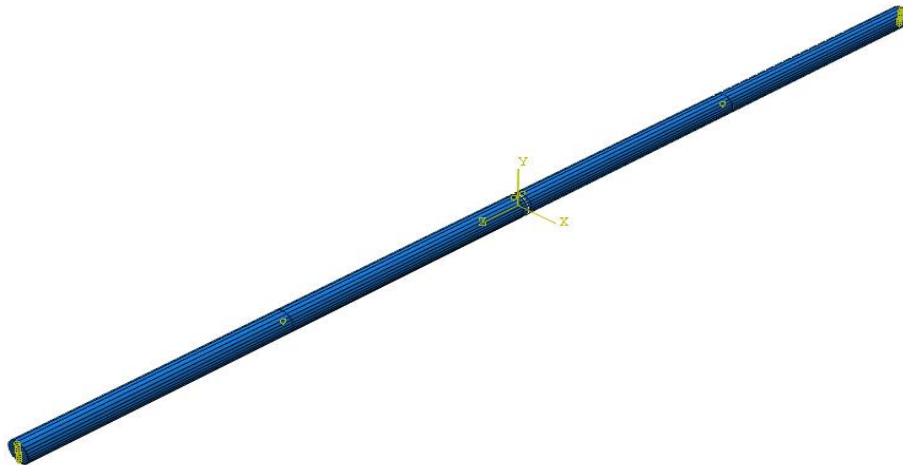


Figura 5.7: Ensamblaje de los dos semiejes.

5.2.4. CONTACTOS SUPERFICIALES EN LA SECCIÓN DE LA FISURA

Como bien se ha mencionado anteriormente, el eje está formado por la unión de dos semiejes, confluyendo en la sección donde se encuentra la fisura. Es necesario estudiar la sección de la fisura, la cual presenta tres zonas diferentes:

- **Zona de unión entre semiejes:** zona que mantiene unidos los dos semiejes. Se trata de la zona que no ha sido fisurada. Esta zona está definida con una restricción de tipo *Tie* (una restricción de comportamiento solidario entre ambos semiejes)
- **Zona de fisura:** esta zona se ha definido mediante un contacto de tipo *Constrain*, que evita que uno de los labios penetre en el otro cuando se cierra la fisura. Este contacto se caracteriza por: un comportamiento normal (para que no se solapen los labios si entran en contacto), y un comportamiento tangencial, el cual se constituye de un contacto entre labios sin rozamiento, ya que las fuerzas

sobre el eje son simétricas y, por tanto, no va a haber desplazamientos relativos entre ambos labios en la zona de solapamiento.

En la figura 5.8 se puede apreciar un esquema de las dos zonas para las cinco profundidades relativas para $\beta = 0$.

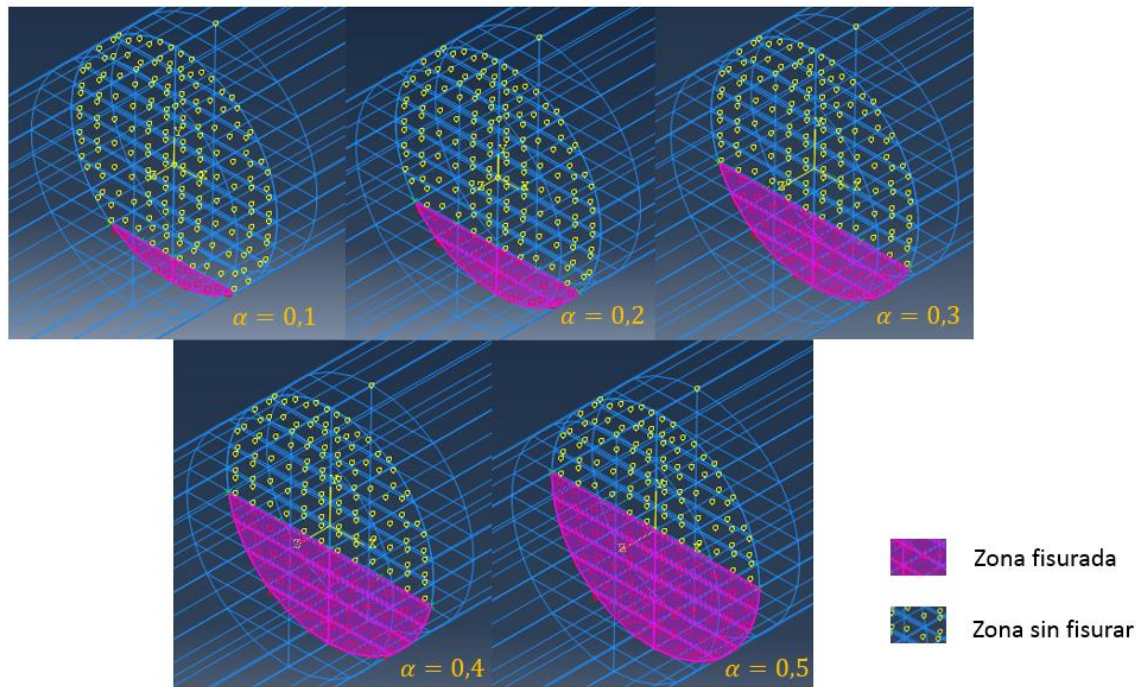


Figura 5.8: Restricciones e interacciones a diferentes profundidades.

5.2.5. CONDICIONES DE CONTORNO Y CARGAS SOBRE EL EJE

El eje se encuentra apoyado en los extremos, con los desplazamientos impedidos en los ejes X e Y en el borde de las secciones de los extremos (ver figura 5.9).

El eje, a su vez, se encuentra sometido a dos cargas puntuales de flexión, idénticas y simétricas con respecto a la sección central del eje (donde se encuentra la fisura). Ambas cargas son de 100 N cada una y están aplicadas sobre el eje de

simetría axial. Cada carga se encuentra a una distancia de 223 mm del apoyo, y la distancia entre ambas cargas es de 454 mm (ver figura 5.9). Para simular estas cargas basta con crear una única carga en el módulo *Load*, y especificar los dos puntos donde se va a aplicar esa carga. Es importante considerar que las cargas van a variar su dirección de 5 en 5 grados, para simular un hemicíclo del eje (ya que sólo estudiaremos hasta 180°).

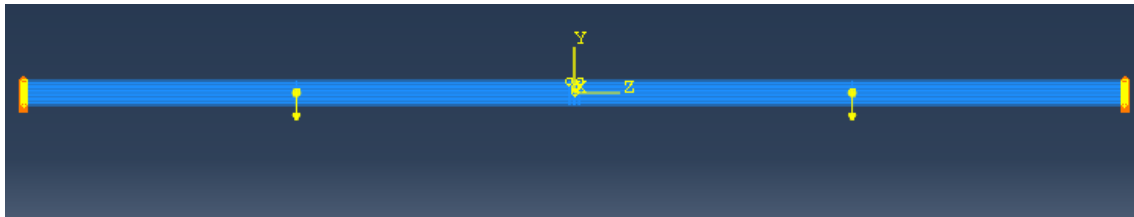


Figura 5.9: Cargas y condiciones de contorno en ABAQUS/CAE.

5.2.6. DISCRETIZACIÓN Y MALLADO

La discretización del modelo estará compuesta por elementos hexaédricos cuadráticos estructurados C3D20 [39]. Es importante destacar la creación de un mallado más fino en las zonas próximas a la fisura, debido a que hay grandes gradientes de tensiones y deformaciones en las proximidades del borde de fisura. Es imprescindible hacer un análisis de sensibilidad de malla hasta que los resultados converjan, para poder obtener un mallado adecuado, con un tamaño de elementos óptimo. Tras el mallado de los modelos, se ha observado que poseen un promedio de aproximadamente 80.000 elementos y 340.000 nodos. En la figuras 5.10 y 5.11 se pueden observar diferentes regiones específicas malladas.

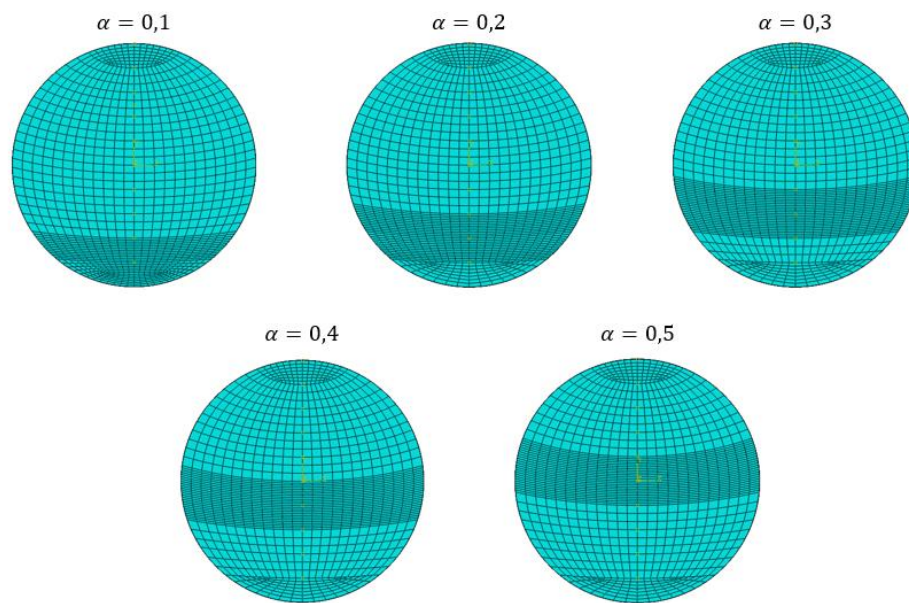


Figura 5.10: Mallado de la sección fisurada para $\beta = 0,50$.

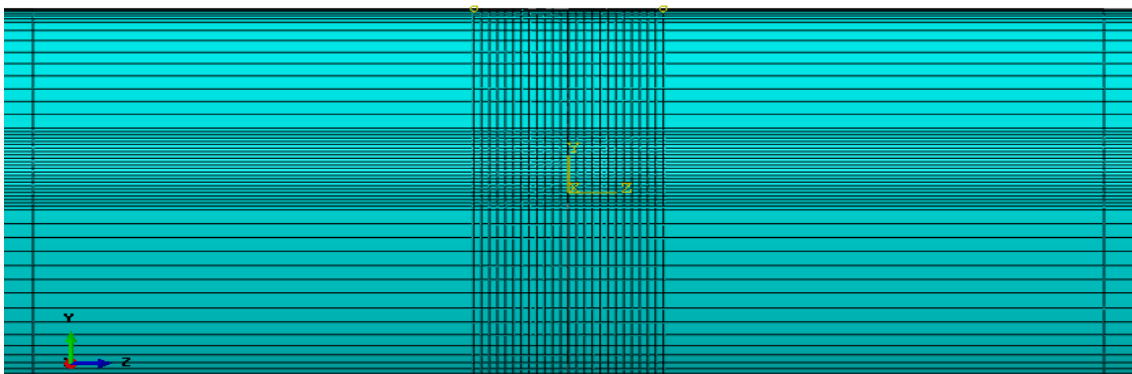


Figura 5.11: Detalle del mallado en las proximidades de la sección fisurada.



5.2.7. OBTENCIÓN DE LOS RESULTADOS DEL FIT

Mediante el módulo *Crack* se puede hacer un análisis profundo de la fractura, obteniéndose el FIT. La obtención del FIT, en cada punto del borde de fisura, es posible gracias a la estimación de las integrales de contorno (Integral J) [5]. Para ello, se debe introducir al programa el número de contornos para el cálculo del FIT. Tras un análisis de los resultados, se ha determinado que la convergencia se acentúa a partir de cinco contornos.

6. RESULTADOS DEL MODELO Y DISCUSIÓN DE LOS MISMOS

6.1. RESULTADOS DEL FIT PARA UN CICLO COMPLETO

En este capítulo se presentarán los valores del FIT para cada factor de forma, profundidad relativa, posición angular de ciclo y posición relativa en el frente de fisura (figuras 6.1 hasta 6.26).

Se puede apreciar que el FIT es positivo cuando la fisura está abierta, ya que los esfuerzos en los labios de la fisura son de tracción. Sin embargo, cuando la fisura está cerrada, aunque los valores del FIT proporcionados por ABAQUS son negativos, se ha considerado la anulación de estos valores de acuerdo a las conclusiones alcanzadas en el trabajo de P. Rubio [11].

6.1.1. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,00$

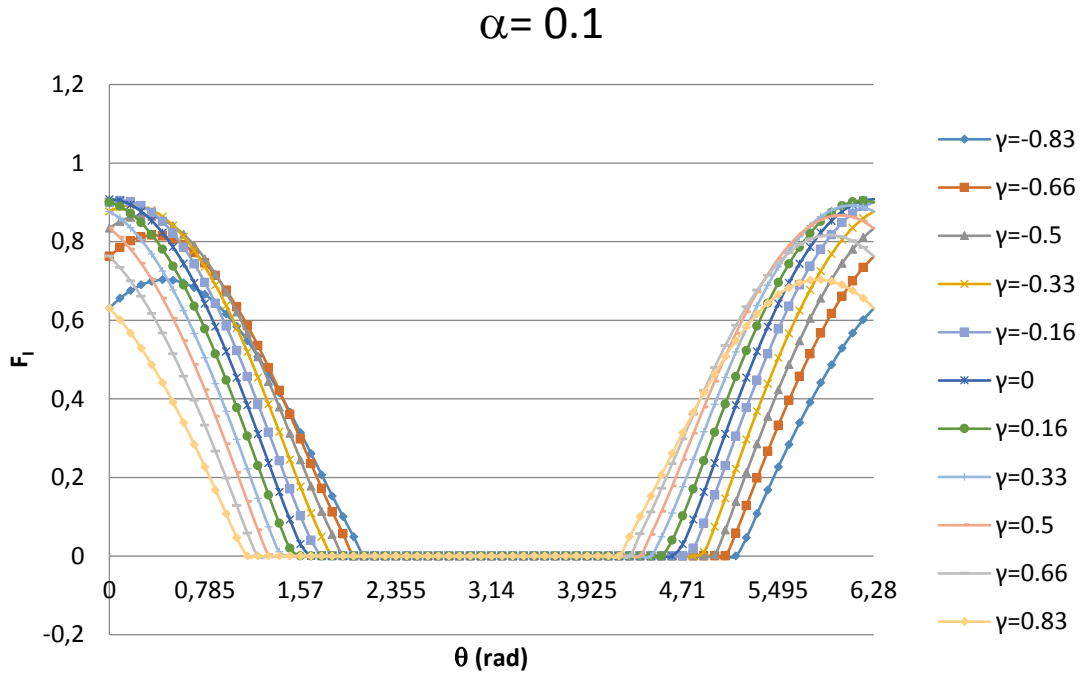


Figura 6.1: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,1$.

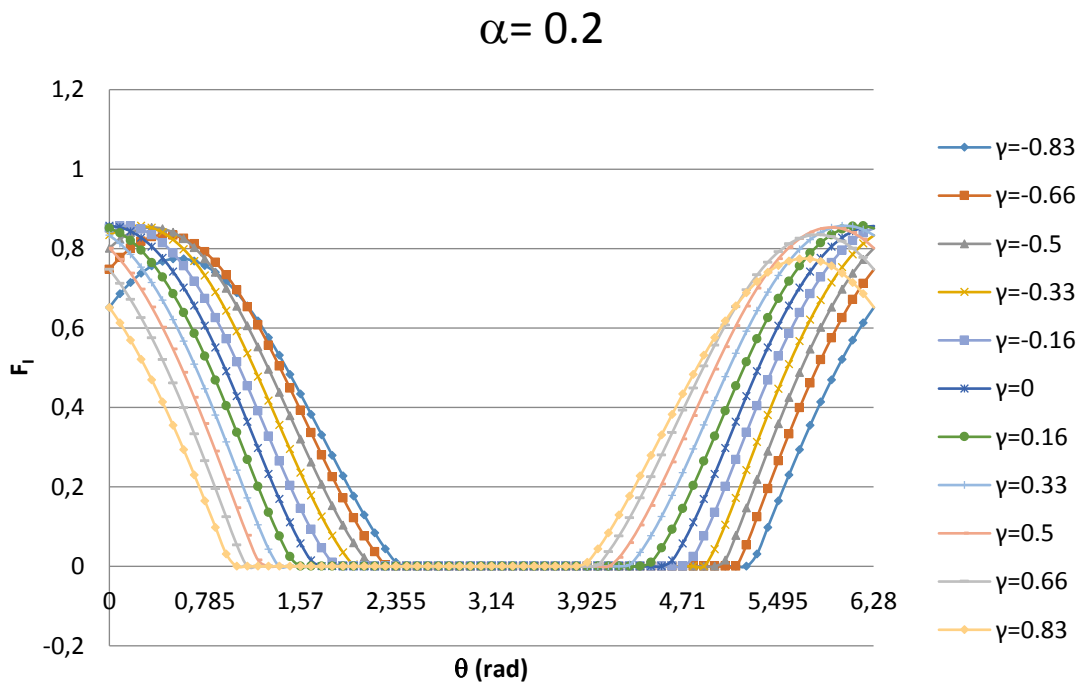


Figura 6.2: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,2$.

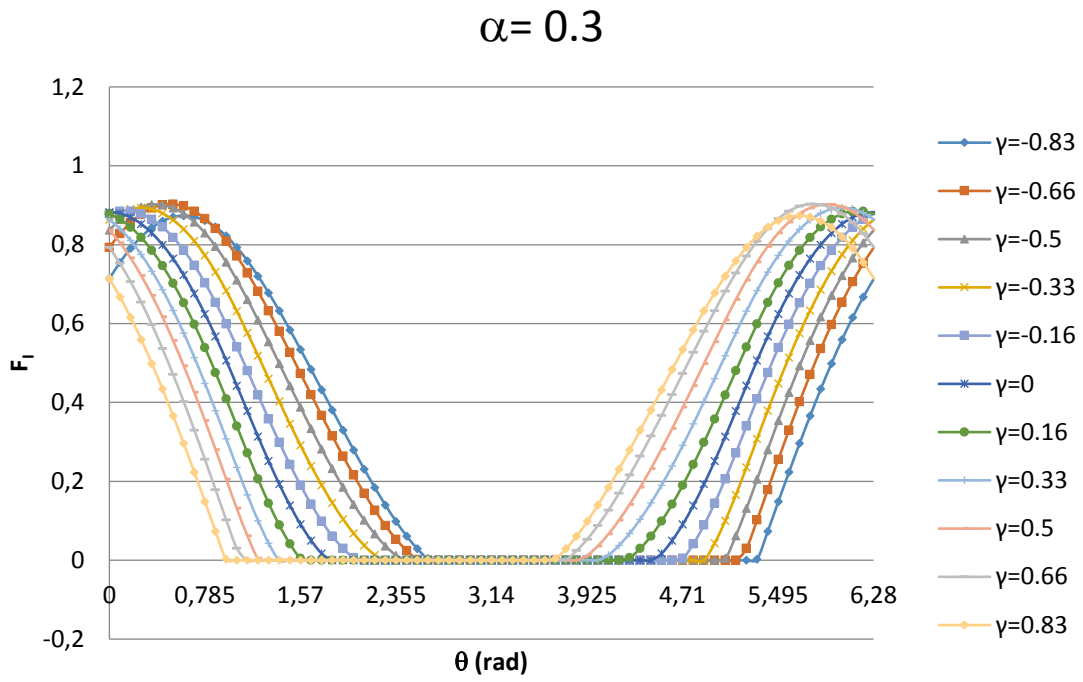


Figura 6.3: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,3$.

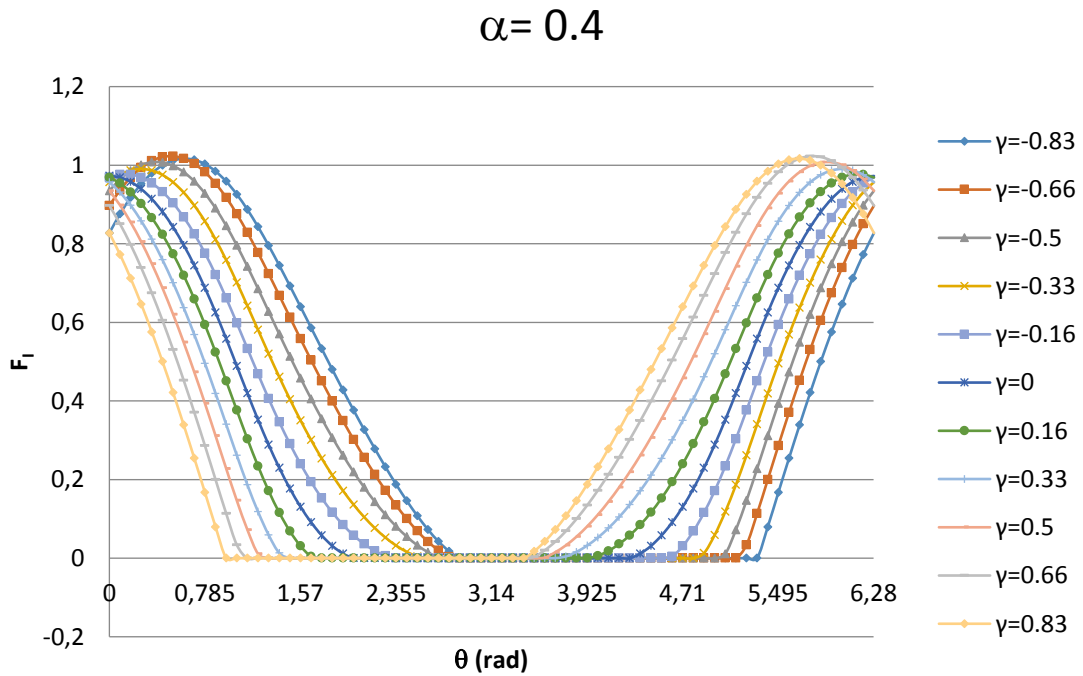


Figura 6.4: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,4$.

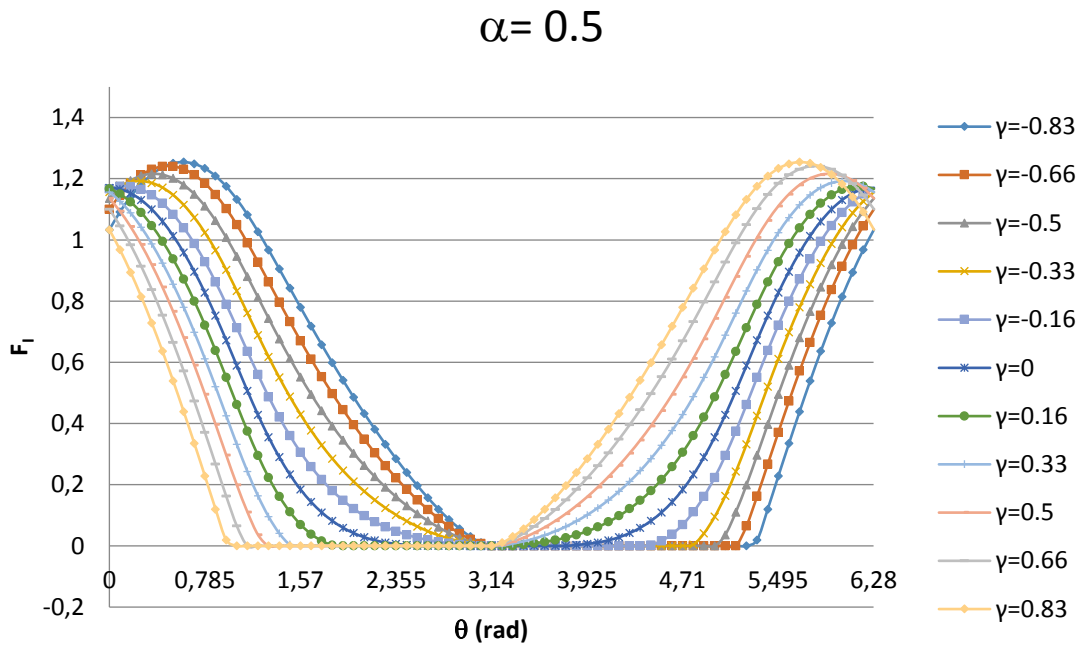


Figura 6.5: FIT adimensional para $\beta = 0,00$ y $\alpha = 0,5$.

Se puede observar que, el rango entre el ángulo en que se empieza a cerrar la fisura y el ángulo en que se empieza a abrir (zona de cierre) es cada vez menor. Es decir, a medida que aumenta la profundidad, disminuye el tiempo en que la fisura está completamente cerrada. De igual manera se observa que los valores del FIT aumentan a medida que aumenta la profundidad de fisura.

Otra observación importante es que, a medida que aumenta la profundidad, el tiempo en que la fisura está completamente abierta (zona de apertura) disminuye.

En la figura 6.6 se pueden observar los diferentes estados de apertura y cierre posibles en la fisura durante el ciclo.

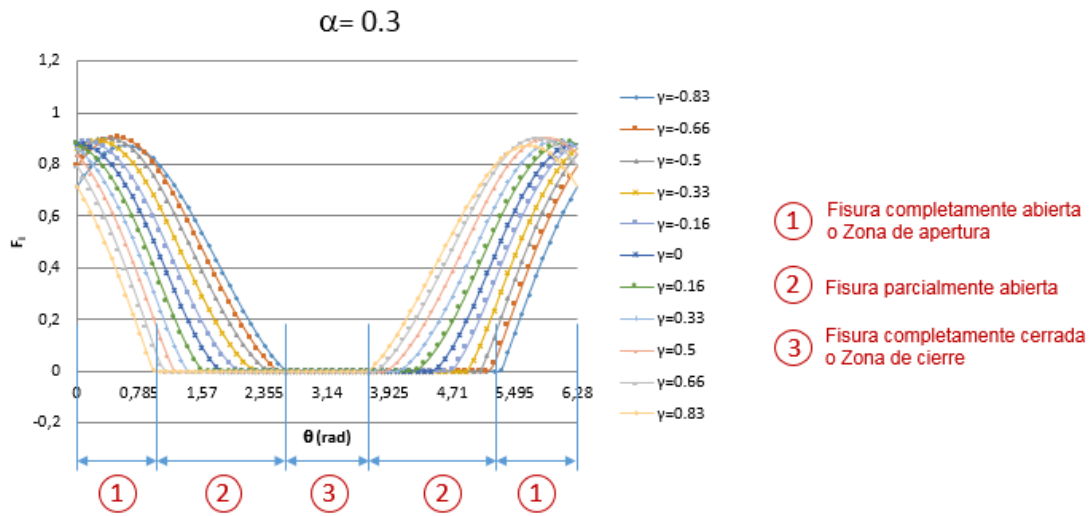


Figura 6.6: Diferentes estados de apertura y cierre de la fisura.

6.1.2. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,25$

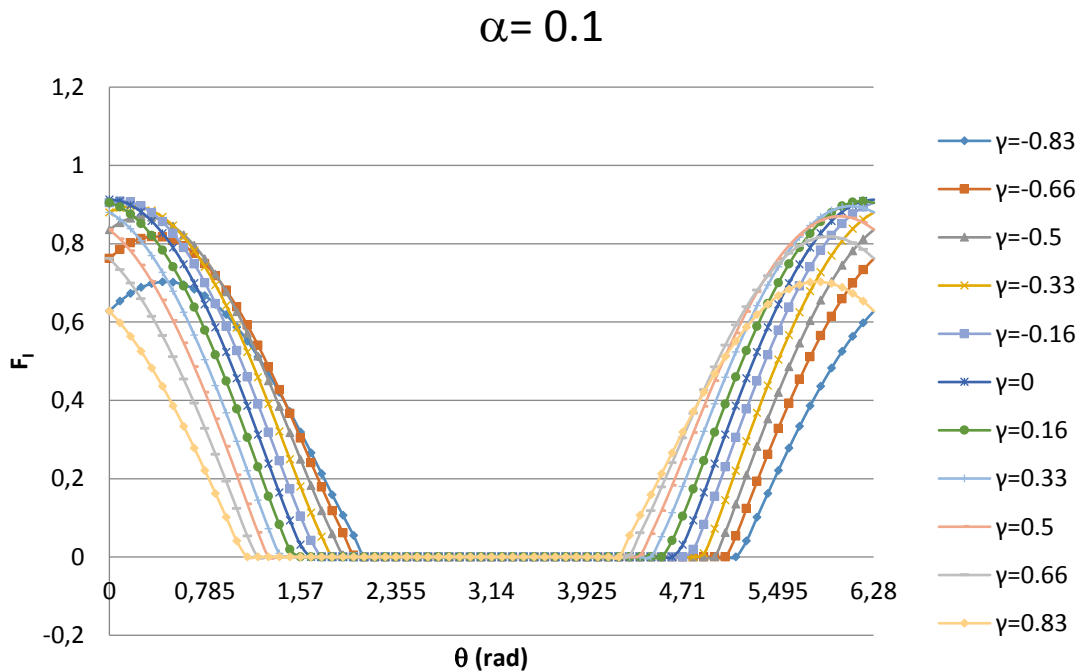


Figura 6.7: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,1$.

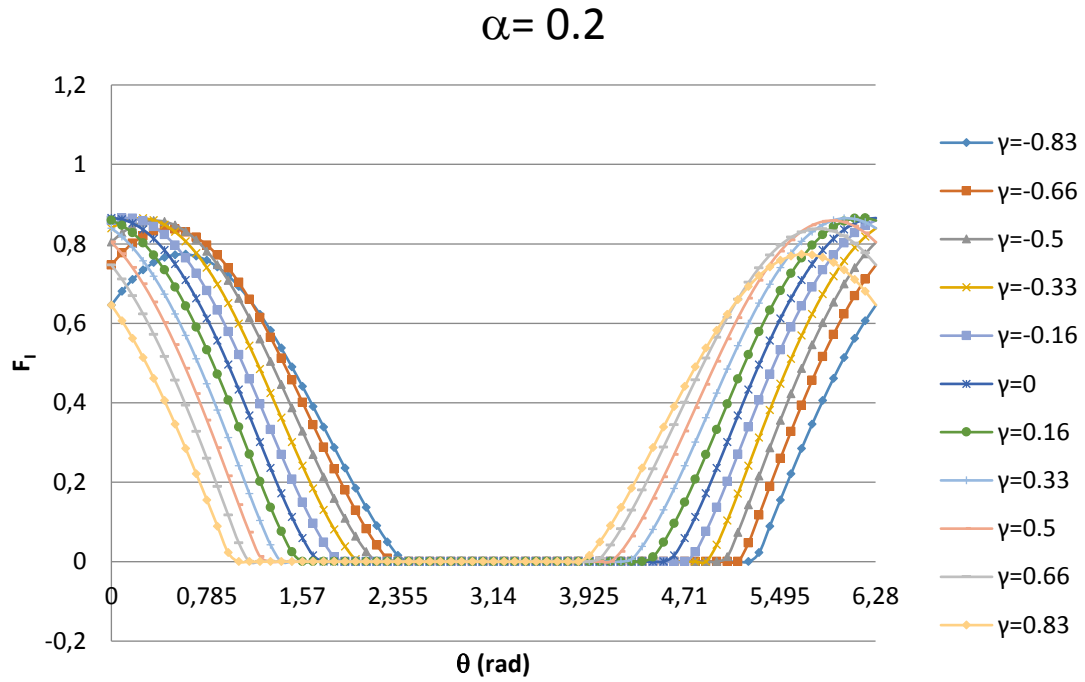


Figura 6.8: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,2$.

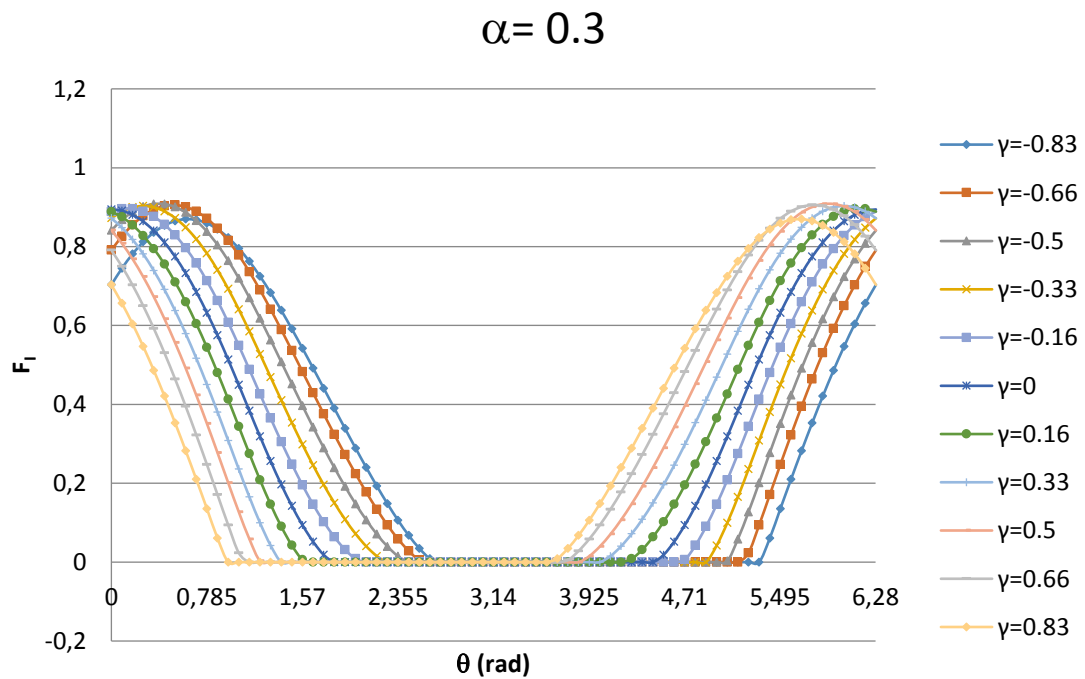


Figura 6.9: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,3$.

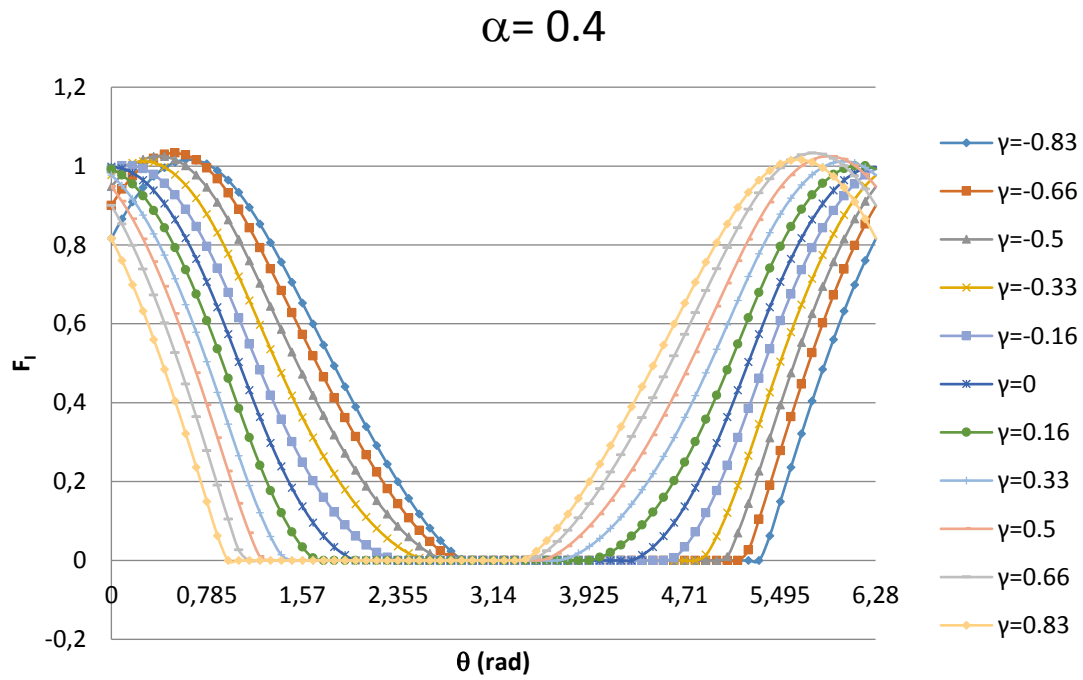


Figura 6.10: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,4$.

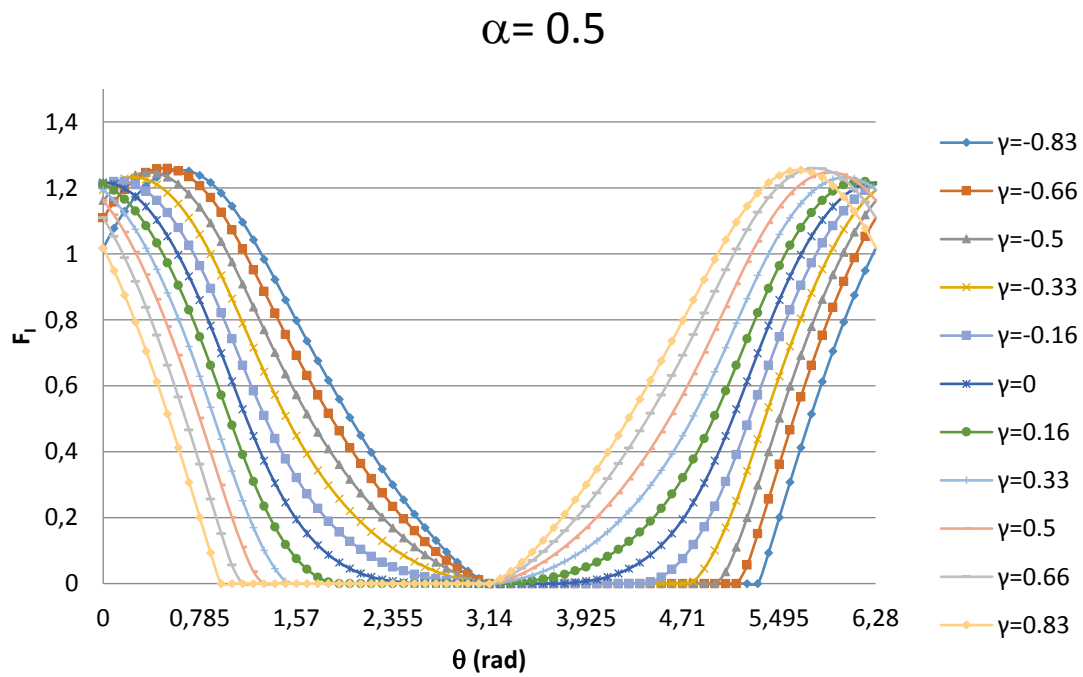


Figura 6.11: FIT adimensional para $\beta = 0,25$ y $\alpha = 0,5$.

De nuevo se puede apreciar la reducción de la zona de cierre (tiempo del ciclo en que la fisura se encuentra totalmente cerrada) y de la zona de apertura (tiempo del ciclo en que la fisura se encuentra totalmente abierta) a medida que aumenta la profundidad de fisura.

El FIT va aumentando a medida que aumenta la profundidad de fisura, disparándose el crecimiento desde $\alpha = 0,4$ hasta $\alpha = 0,5$.

6.1.3. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,50$

$\alpha = 0.1$

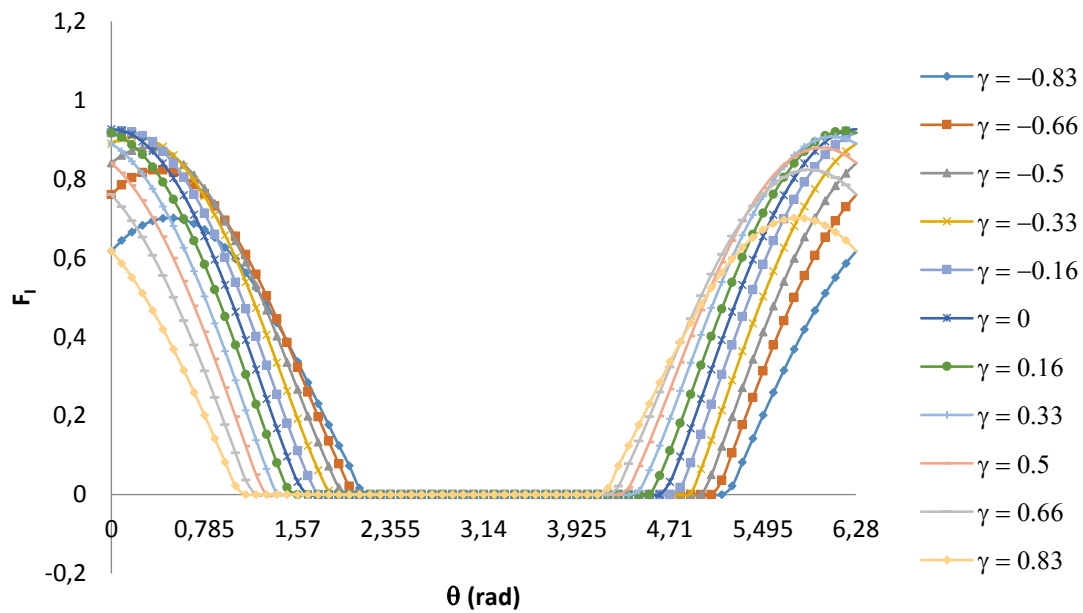


Figura 6.12: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,1$.

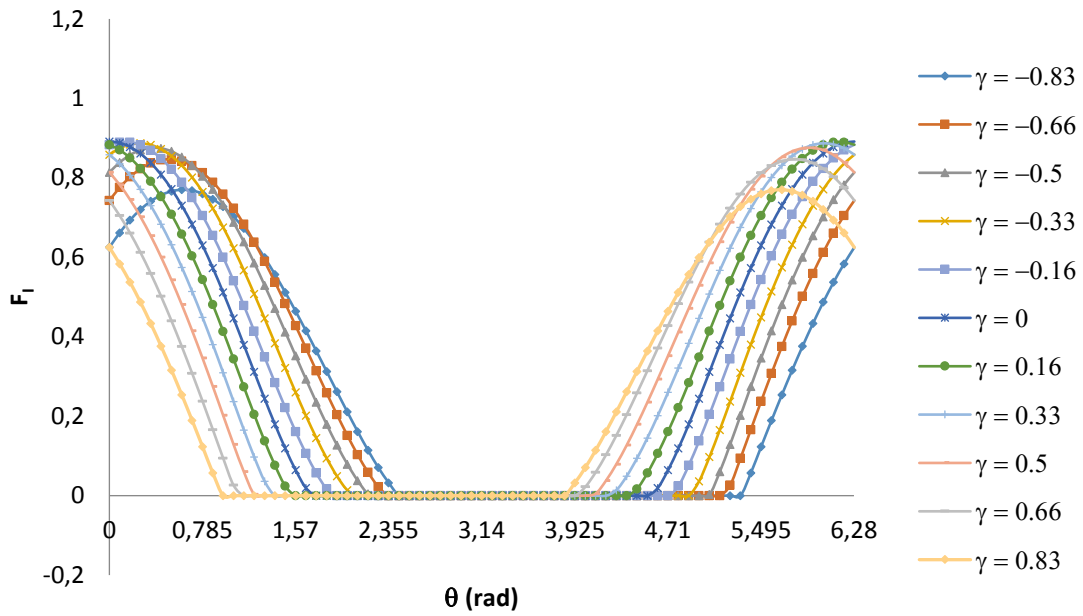
$\alpha = 0.2$


Figura 6.13: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,2$.

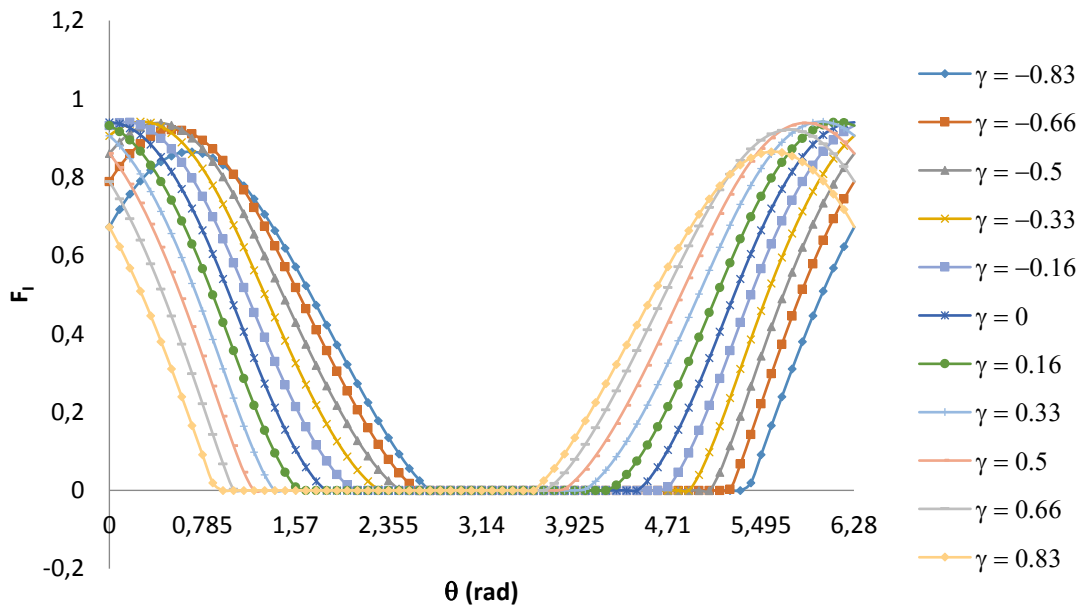
 $\alpha = 0.3$


Figura 6.14: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,3$.

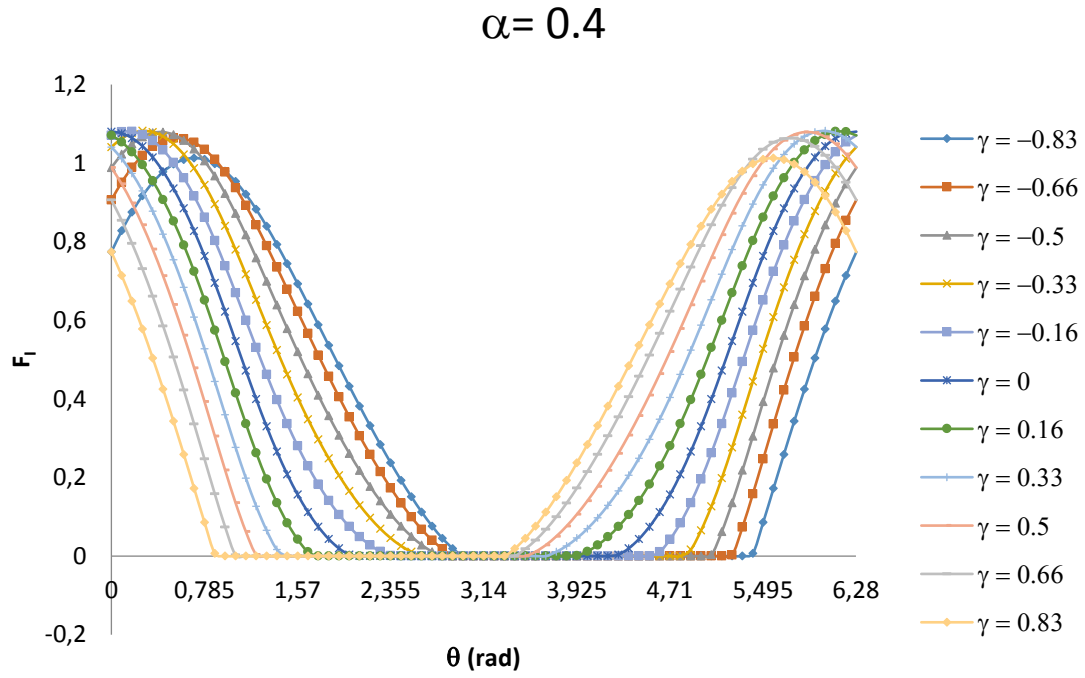


Figura 6.15: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,4$.

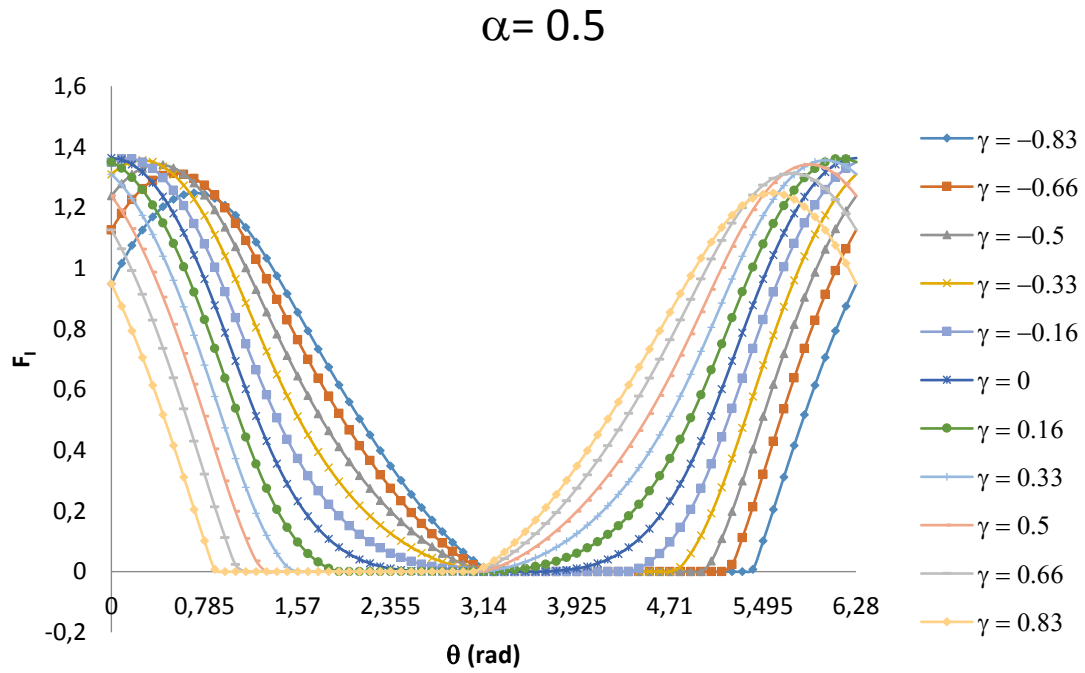


Figura 6.16: FIT adimensional para $\beta = 0,50$ y $\alpha = 0,5$.

Al igual que en los factores de forma anteriores, se puede observar el aumento del FIT a lo largo que va aumentando la profundidad.

Se puede ver cómo va disminuyendo la zona de cierre y la zona de apertura a medida que va aumentando la profundidad relativa de fisura.

6.1.4. FACTOR DE FORMA $\beta = 0,75$

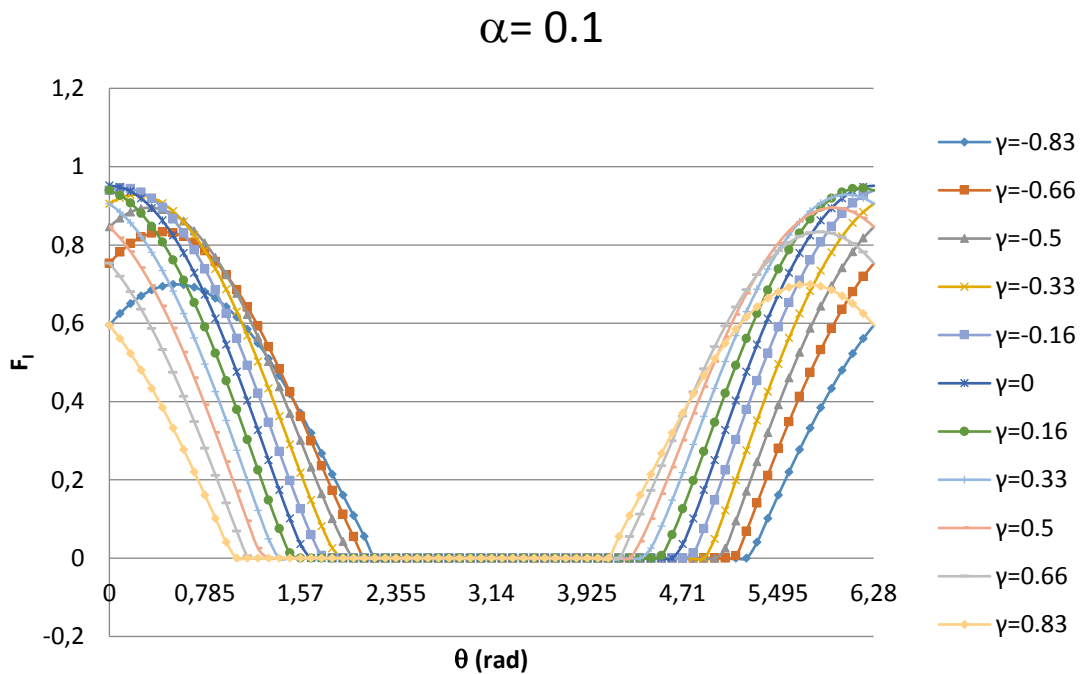


Figura 6.17: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,1$.

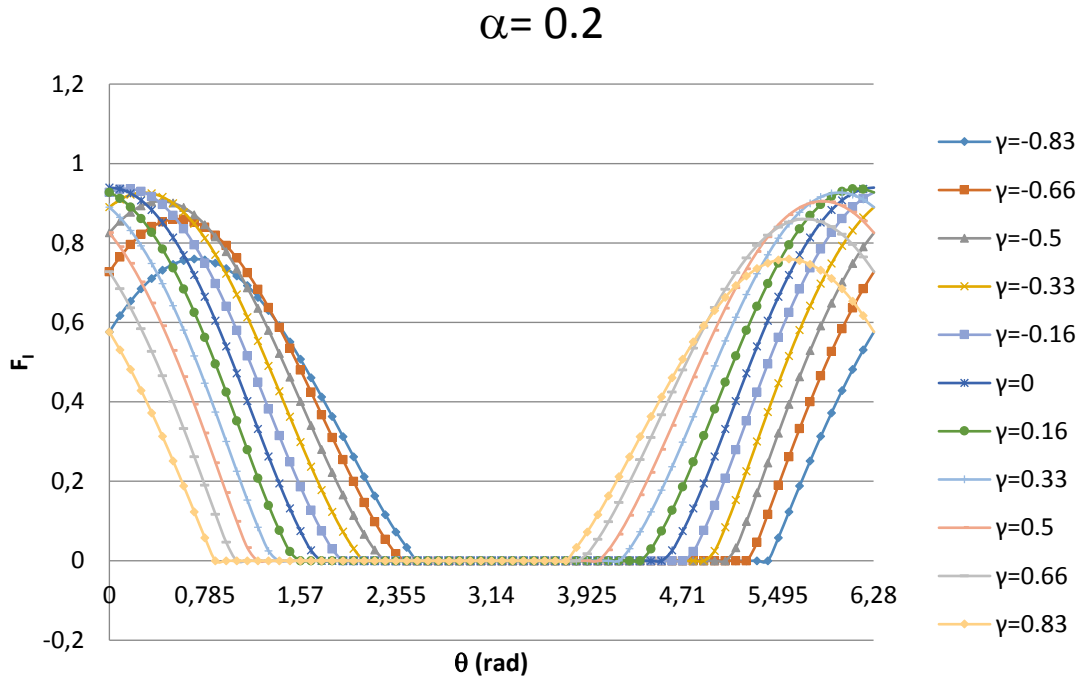


Figura 6.18: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,2$.

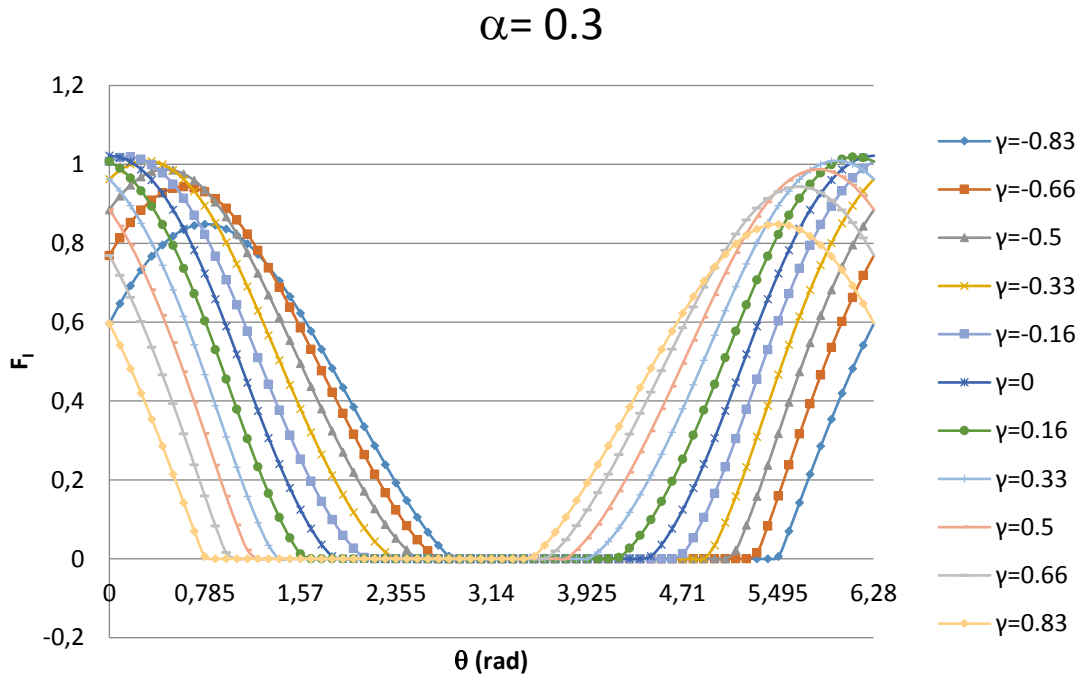


Figura 6.19: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,3$.

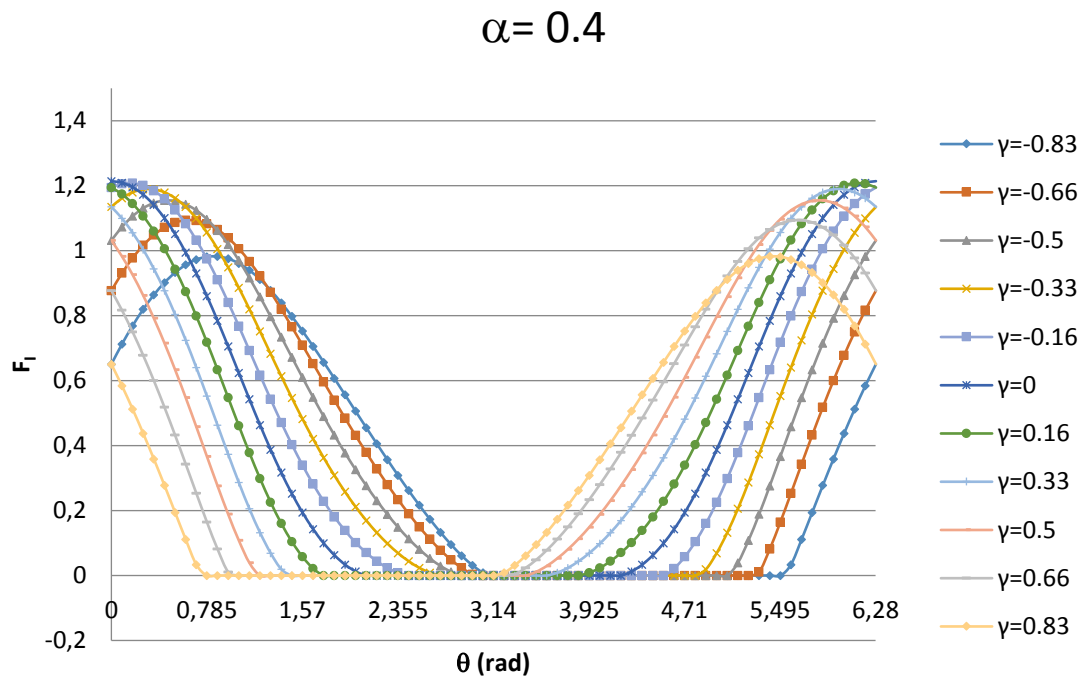


Figura 6.20: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,4$.

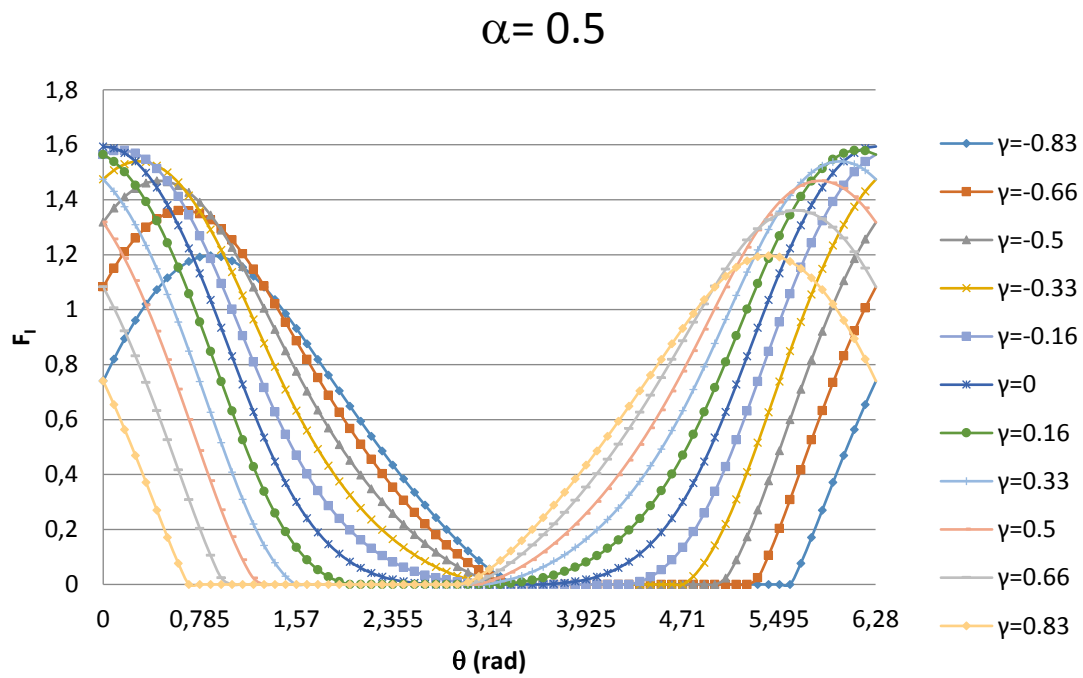


Figura 6.21: FIT adimensional para $\beta = 0,75$ y $\alpha = 0,5$.

Una vez más, se puede observar la disminución de las zonas de cierre y apertura a medida que aumenta la profundidad relativa de fisura.

El FIT aumenta a medida que aumenta la profundidad de fisura, aumentando exponencialmente desde $\alpha = 0,3$ hasta $\alpha = 0,5$.

6.1.5. FACTOR DE FORMA $\beta = 1,00$

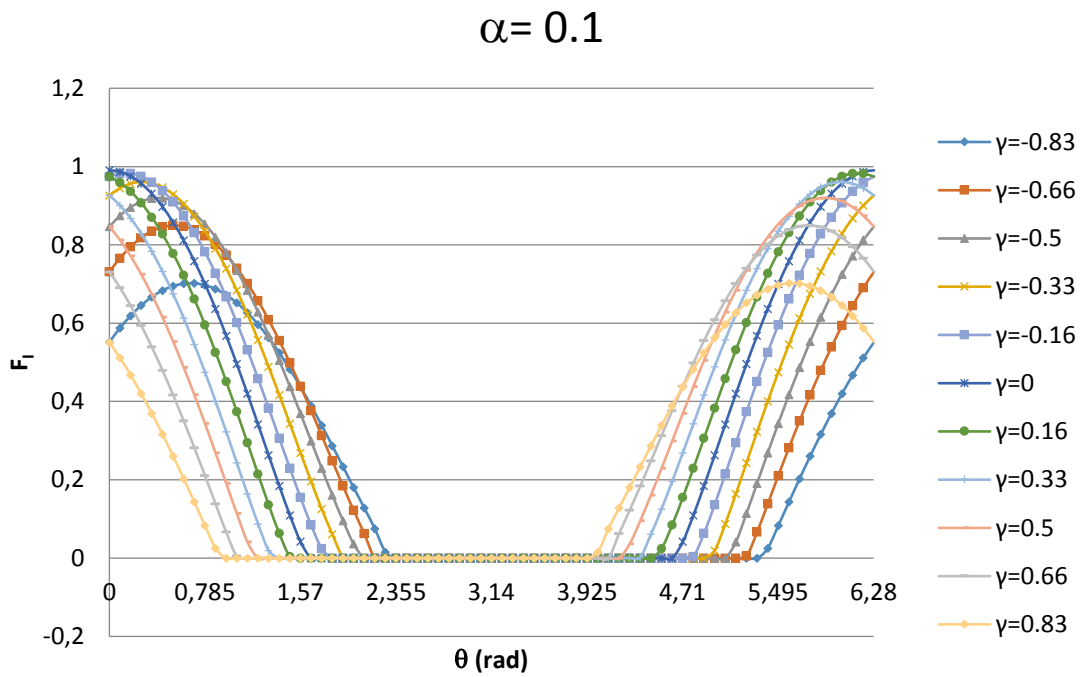


Figura 6.22: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,1$.

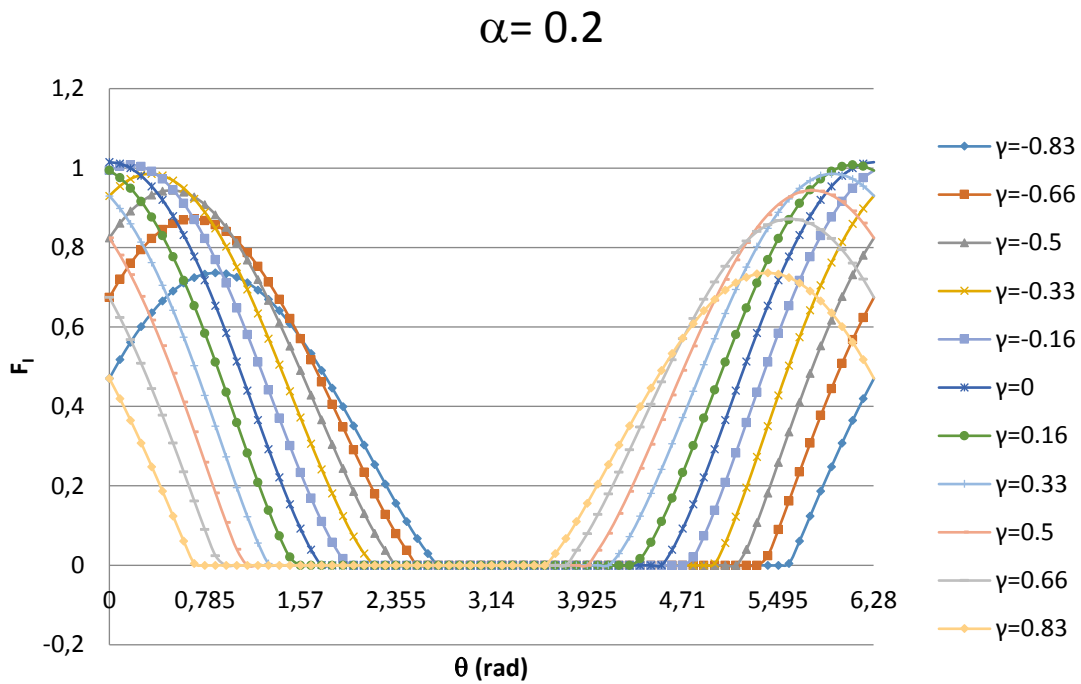


Figura 6.23: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,2$.

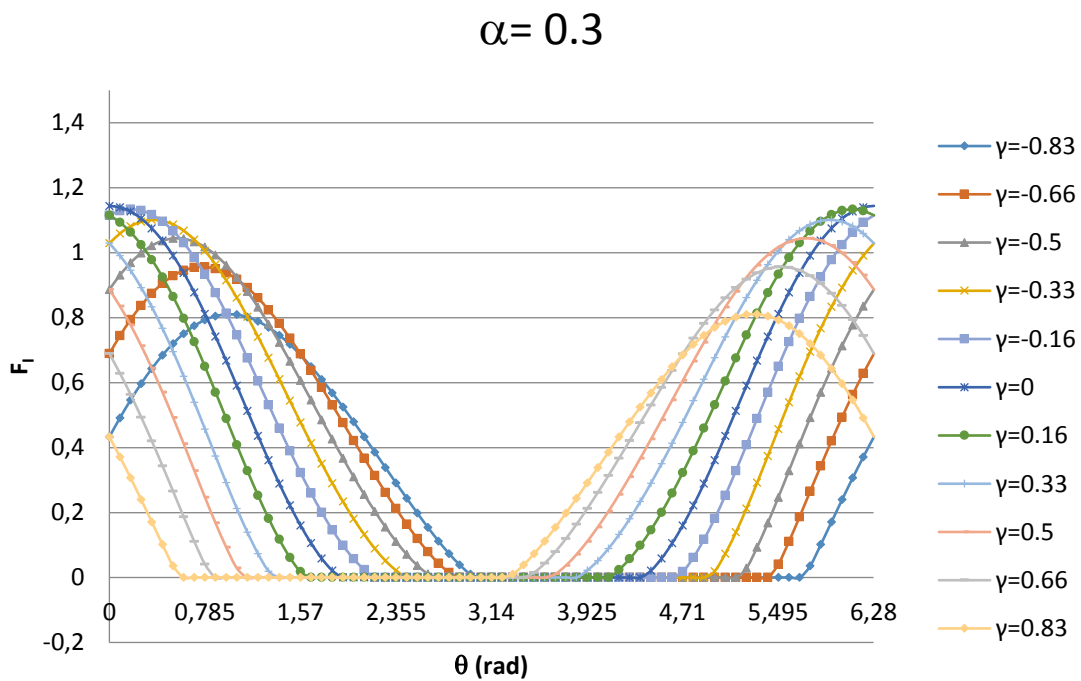


Figura 6.24: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,3$.

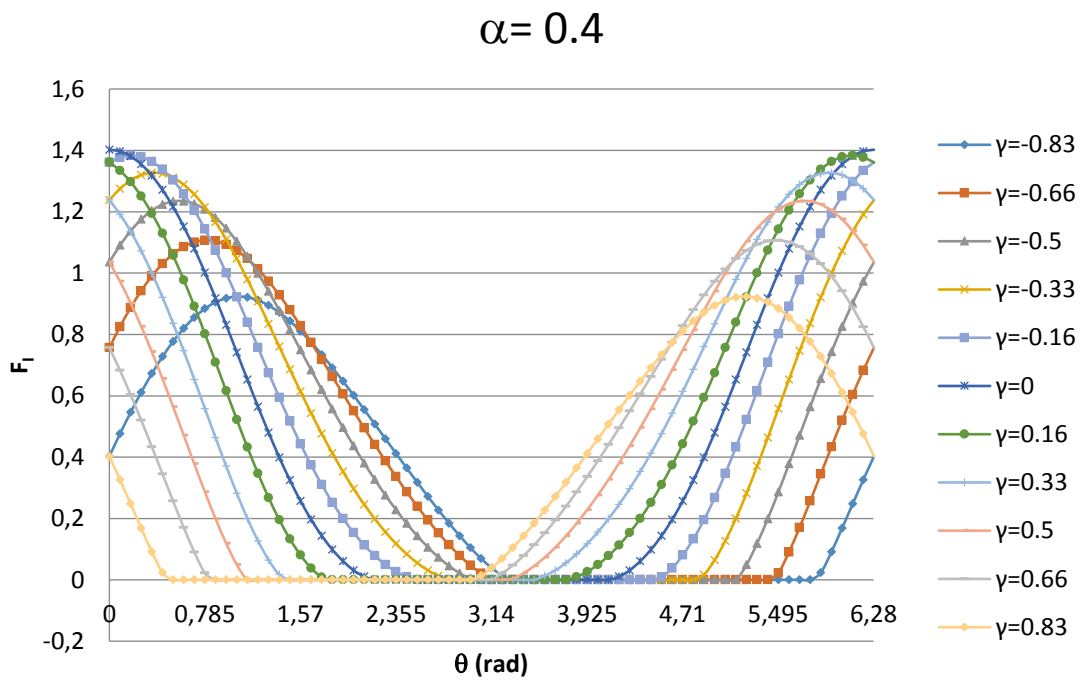


Figura 6.25: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,4$.

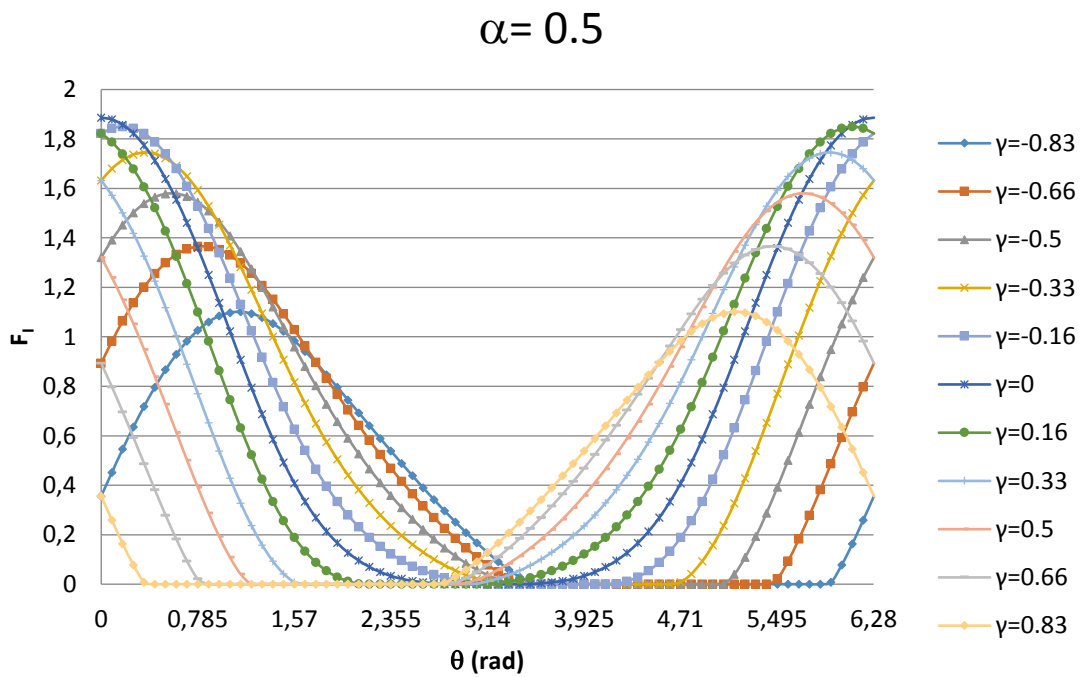


Figura 6.26: FIT adimensional para $\beta = 1,00$ y $\alpha = 0,5$.



Finalmente, para $\beta = 1,00$ las zonas de cierre y apertura también disminuyen a medida que aumenta la profundidad relativa de fisura.

El FIT ha ido aumentando a medida que aumentaba la profundidad de fisura, habiendo mayor crecimiento en las profundidades relativas más altas (0,3; 0,4 y 0,5).

7. VALIDACIÓN DEL MODELO

Para validar el modelo numérico, se compararán los resultados obtenidos con los de P. Rubio [31], para el caso de fisura de frente recto ($\beta = 0$).

A continuación, se presentarán gráficas comparativas, con el objetivo de visualizar los datos obtenidos y la comparación con respecto a los datos de P. Rubio [31].

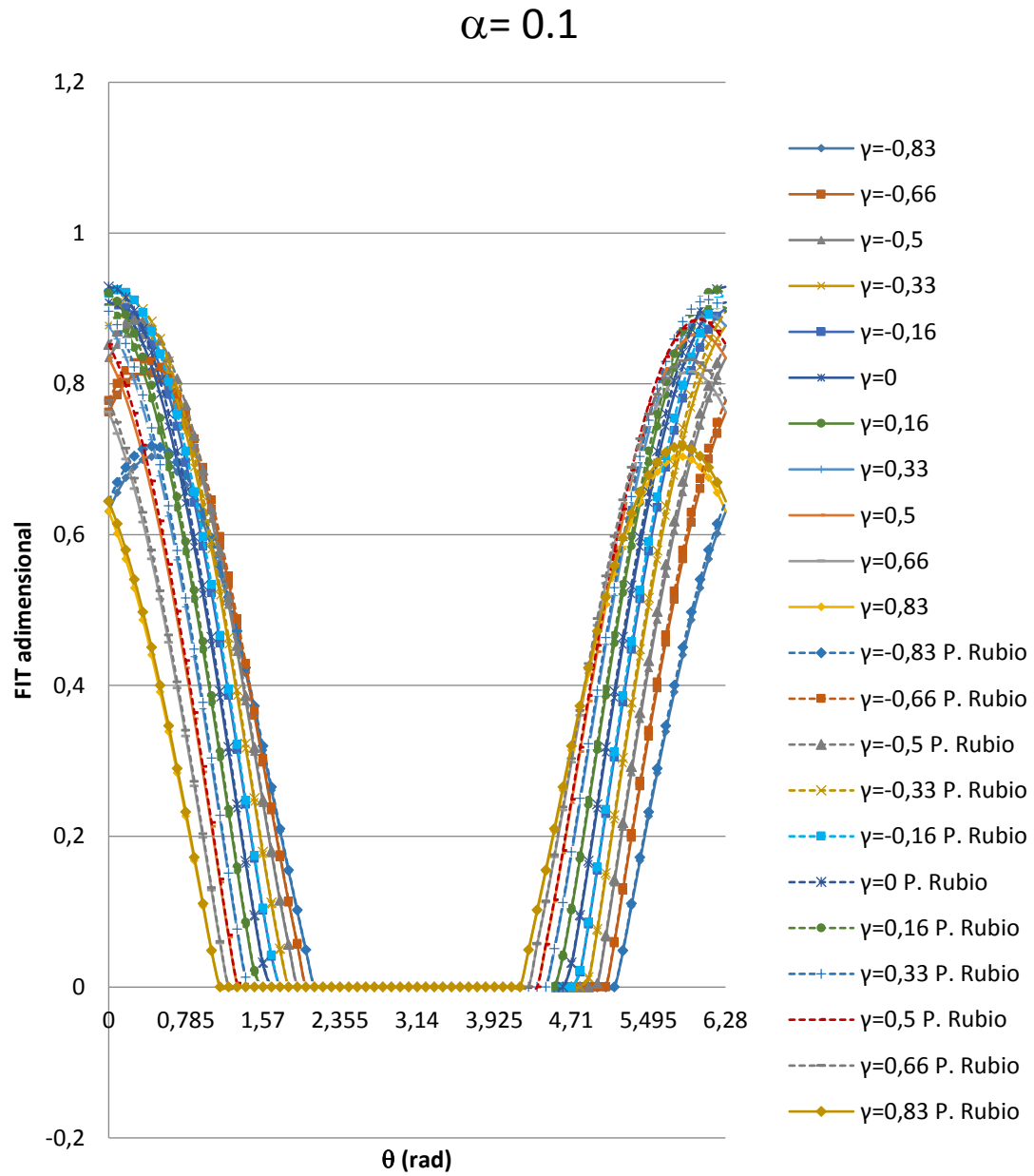


Figura 7.1: Comparación entre los resultados del F_i con los de P. Rubio [31] para $\alpha = 0, 1$.

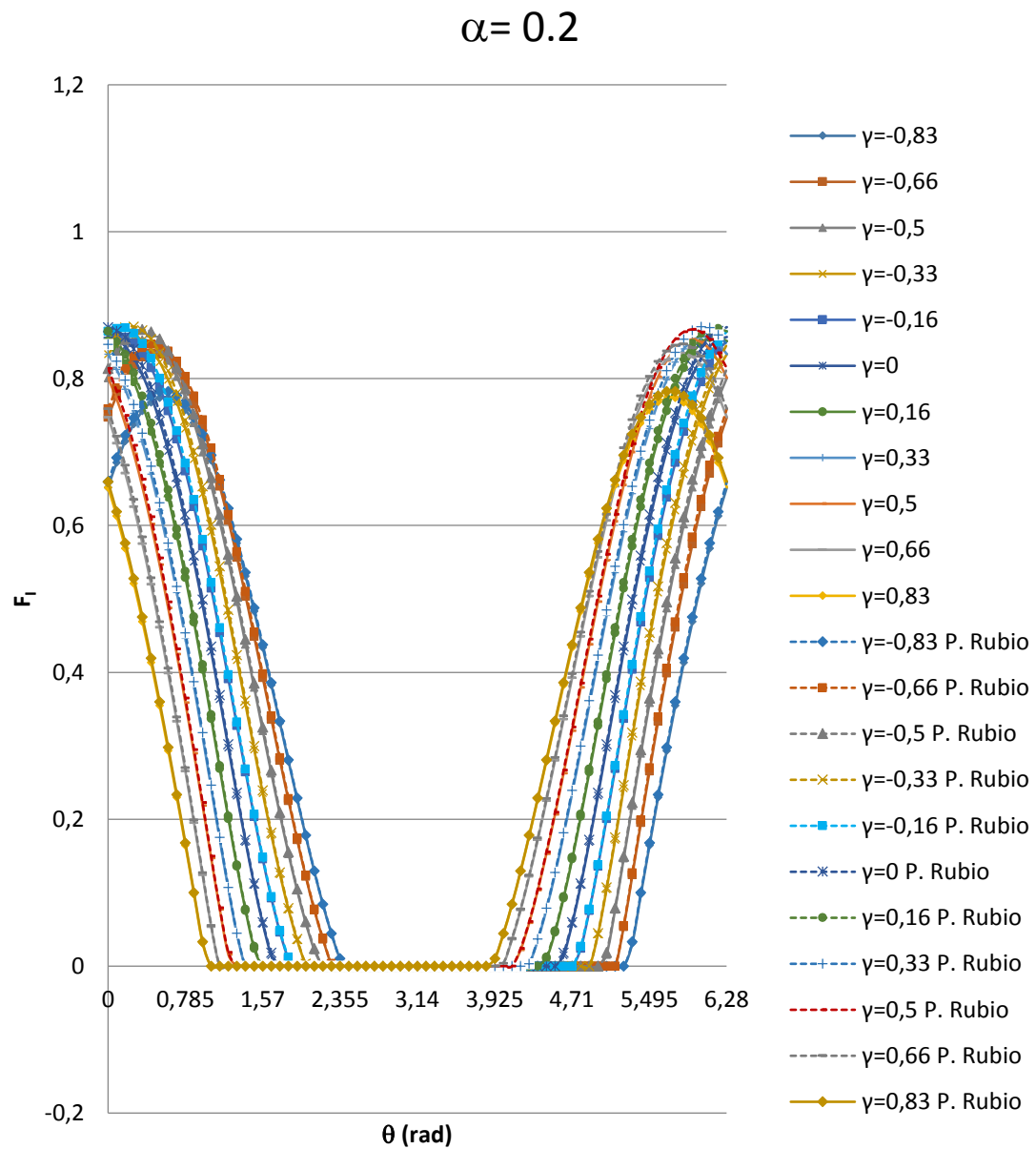


Figura 7.2: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [31] para $\alpha = 0.2$.

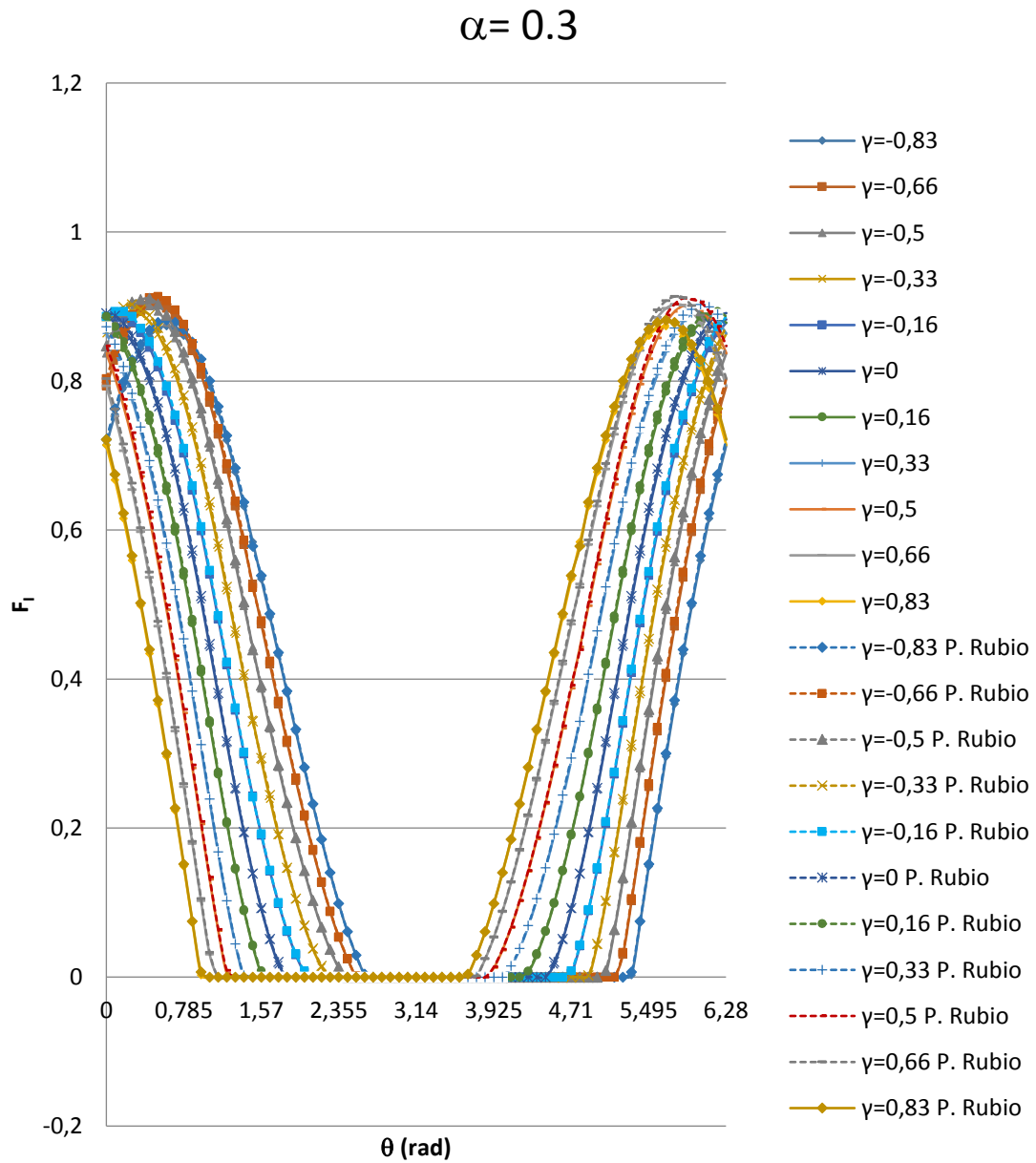


Figura 7.3: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [31] para $\alpha = 0.3$.

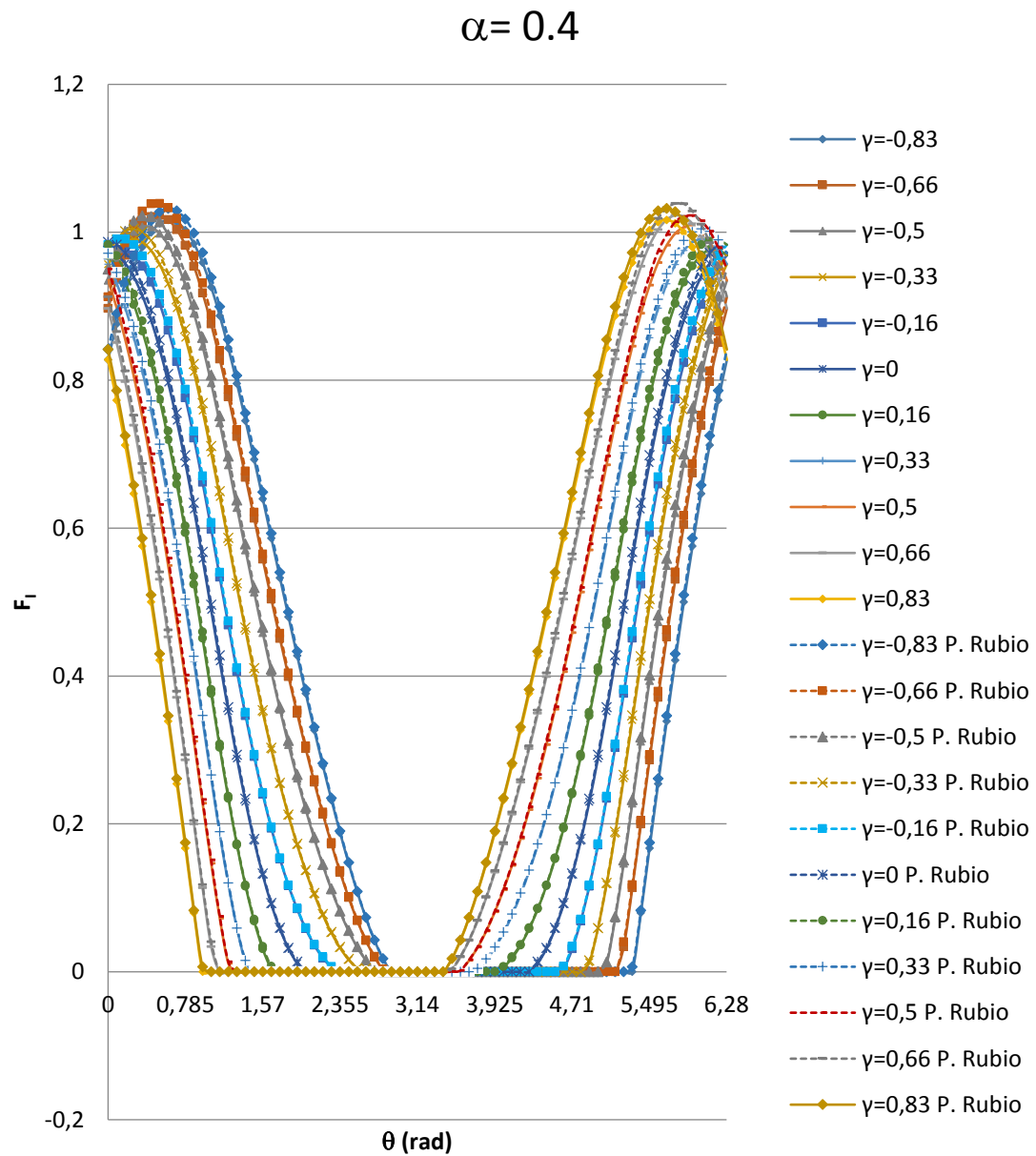


Figura 7.4: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [31] para $\alpha = 0.4$.

$$\alpha = 0.5$$

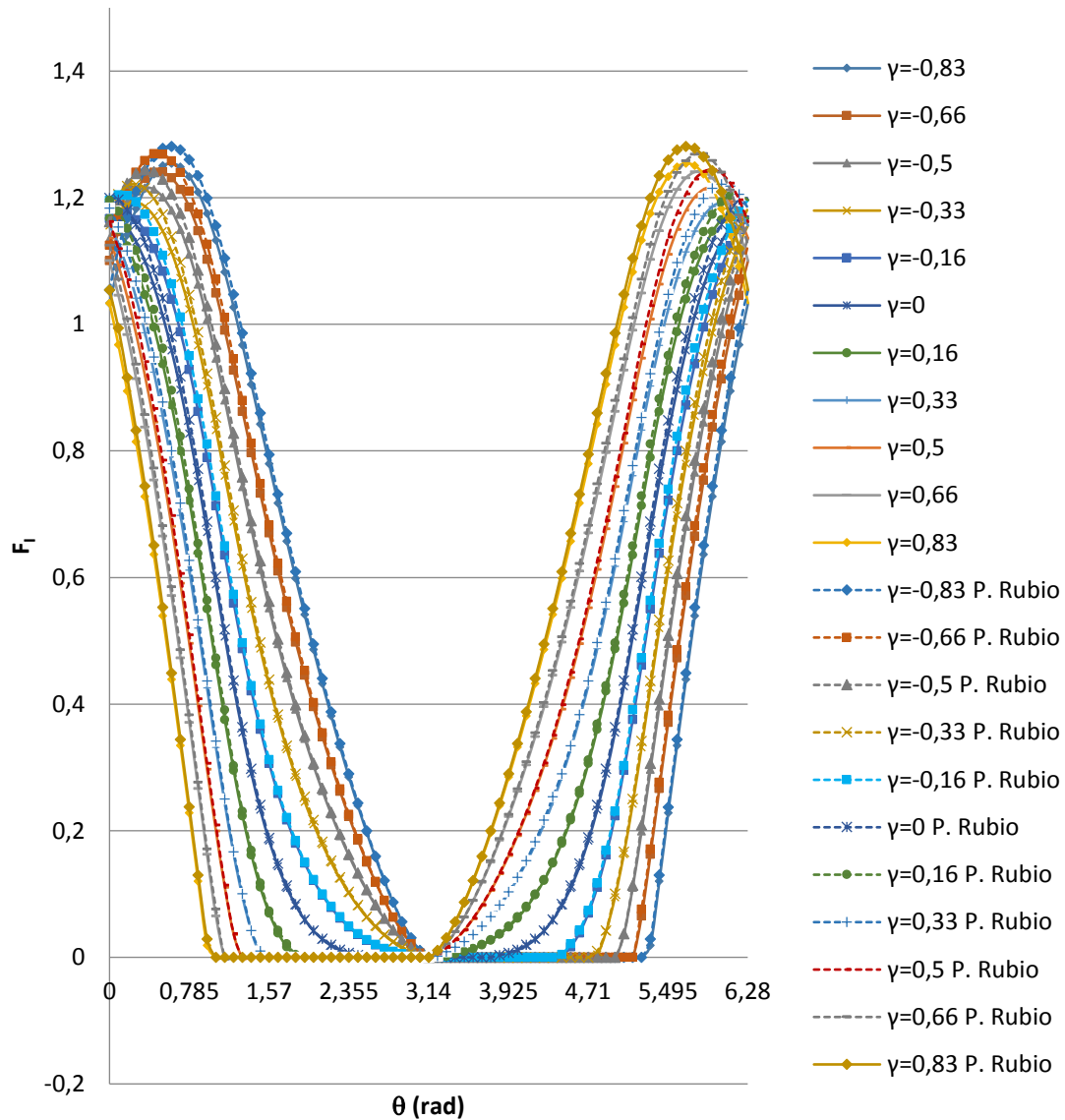


Figura 7.5: Comparación entre los resultados del F_I con los de P. Rubio [31] para $\alpha = 0.5$.

Como se puede observar, los resultados son muy similares a la fuente con la que se compara, con un error relativo inferior al 4% en el 95% de los datos comparados. Para la zona próxima a la franja intermedia entre la zona abierta y la zona cerrada, el error es ligeramente mayor, debido a que se trata de una zona problemática.

8. CONCLUSIONES

Tras hacer un estudio profundo del FIT, para fisuras con forma cóncava en un giro completo del eje, es preciso destacar ciertas observaciones trascendentales en el estudio de este fenómeno.

Se puede apreciar que la zona de cierre de la fisura disminuye, sin depender del factor de forma, a medida que va aumentando la profundidad relativa. De la misma manera, el periodo en que la fisura se encuentra totalmente abierta disminuye a medida que aumenta la profundidad (independientemente del factor de forma).

También se observa el aumento del FIT adimensionalizado a medida que aumenta la profundidad relativa, lo cual es lógico, ya que las tensiones en el frente de fisura son muy superiores a las tensiones obtenidas por las sollicitaciones externas, y van aumentando conforme a la profundidad, produciéndose un aumento del FIT adimensionalizado.

Para la mayoría de los casos, para la posición angular de 135° , la fisura se ha cerrado casi por completo, ya que posee valores nulos y valores próximos al cero. Para el caso de $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$ la fisura no llega a cerrarse del todo durante el ciclo, sólo en las posiciones centrales del borde de fisura; sin embargo, en la mayoría de casos, en la mitad del ciclo la fisura ha sido cerrada por completo.

Se debe destacar que, a medida que aumenta la curvatura del borde de fisura, el FIT crece en sus puntos centrales y decrece en los extremos.

Es importante visualizar los valores extremos del FIT en las gráficas, donde se aprecia que, para la posición angular de 0 grados, los valores del FIT son máximos. En contraposición al instante del hemicycle (posición angular de 180 grados), donde se aprecian valores mínimos del FIT.

Es importante destacar que, los valores del FIT son simétricos para valores opuestos de γ , con simetría en $\theta = 180^\circ$.

9. PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO

Como ingeniero, es muy importante presentar una planificación del proyecto y su presupuesto, para que quede constancia del proyecto y para orientar a proyectos futuros afines.

El proyecto presente abarca desde el 18 de diciembre de 2014 hasta el 12 de Febrero de 2016. En la tabla 9.1 se expondrán las tareas y sucesos importantes de este proyecto.

TAREA	FECHA DE INICIO	FECHA DE FIN	HORAS	DÍAS PRODUCTIVOS
Solicitud	18/12/2014	18/12/2014		
Reunión para la explicación del proyecto			1	1
Adjudicación del proyecto	26/1/2015			
Primeras deliberaciones	27/1/2015	20/2/2015	20	12
Planificación	21/2/2015	21/2/2015	3	1
Desarrollo del proyecto	26/2/2015	15/2/2016		
• Aprendizaje de ABAQUS	26/2/2015	20/4/2015	31	15
• Creación y simulación de los casos	26/2/2015	16/12/2015	2729	162
• Extracción de datos	20/6/2015	17/12/2015	50	16
• Tratamiento de datos en EXCEL	17/12/2015	31/1/2016	28	30
• Redacción de la memoria	1/2/2016	15/2/2016	67	18
TOTAL	18/12/2014	15/2/2016	2929	255

Tabla 9.1: Planificación del proyecto.

Hay que destacar el cálculo estimado de las horas de simulación de los casos, en la fórmula 9.1 se puede apreciar dicho cálculo.

$$t_S = \bar{T} * N_C \quad (9.1)$$

Donde t_S es el tiempo de simulación, \bar{T} es el tiempo promedio para la resolución de un caso (3 horas en este proyecto), N_C es el número total de casos (900 en total). Dando un resultado aproximado de 2700 horas. Las 29 horas restantes corresponden a la creación de casos de ABAQUS.

En cuanto al presupuesto del proyecto, hay que destacar el coste del personal docente dirigente del proyecto, el coste del equipo personal (Ordenador personal) adquirido para el desarrollo del proyecto, coste del equipo del laboratorio, disco duro extraíble, coste de las licencias de *ABAQUS 6.11*® y *MICROSOFT OFFICE*®.

Se tiene instancia de los costes descritos en la tabla 9.2.

INVERSIÓN	COSTE
LICENCIA ABAQUS 6.11	33.650 €
PAQUETE MICROSOFT OFFICE 2013	499 €
DISCO DURO EXTRAÍBLE	100 €
ORDENADOR LABORATORIO	2.000 €
ORDENADOR PERSONAL	1.000 €
TOTAL	37.249 €

Tabla 8.2: Inversiones para el proyecto.

Es necesario introducir el coste de amortización del material utilizado para el proyecto, el cual puede verse en la ecuación 9.2.

$$C_{AMORT} = \frac{T}{V} * A * \eta \quad (9.2)$$

Donde C_{AMORT} es el coste de amortización del equipo (bien o servicio), T es el tiempo de empleo del equipo, V es la vida útil del equipo, A es el coste total del equipo, η es la eficiencia presente en el uso del equipo, la cual indica si su uso es para los fines establecidos (en tanto por uno).



INVERSIÓN	TIEMPO DE UTILIZACIÓN (T) EN MESES	VIDA ÚTIL (V) EN MESES	COSTE TOTAL (A)	EFICIENCIA (η)	COSTE DE AMORTIZACIÓN (C_{AMORT})
LICENCIA ABAQUS 6.11	10	12	33.650 €	1	28.041,67 €
PAQUETE MICROSOFT OFFICE 2013	2	12	499 €	1	83,17 €
DISCO DURO	8	60	100 €	1	13,33 €
ORDENADOR PERSONAL	8	120	1.000 €	1	66,67 €
ORDENADOR LABORATORIO	4	120	2.000 €	1	66,67 €
TOTAL	28.271,51 €				

Tabla 9.3: Amortización de las inversiones.



10. TRABAJOS FUTUROS

Durante la realización de este proyecto, han surgido ideas para futuros proyectos e investigaciones.

- ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN DE FISURAS SEMIELÍPTICAS CON FORMA CÓNCAVA CONTENIDAS EN EJES GIRATORIOS.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Griffith, A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions*, 221, 163-198.
- [2] Irwin, G. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 24, 361-364.
- [3] Orowan, E. (1948). Fracture and strength of solids. *Reports on Progress in Physics*, 12, 185-232.
- [4] Paris, P., Erdogan, F. (1963). A critical analysis of crack propagation laws. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 85, 528-534.
- [5] Rice, J. (1968). A path independent integral and the approximated analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 379-386.
- [6] Cherepanov, G.P. (1967). The propagation of cracks in a continuous medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3), 503-512.
- [7] Saint-Venant, J. C. B. (1855). *Memorie sur la Torsion des Prismes*. Mem. Drivers Savants, 14, 233-560.
- [8] Arana, J. L., González, J. J. (2002). *Mecánica de la Fractura*. Universidad del País Vasco.
- [9] Paris, P., Gómez, M., Anderson, W. (1961). A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13, 9-14.
- [10] Rubio, L., Montero, L., Muñoz-Abella, B., Rubio, P. (2012). Efecto de la presencia y orientación de una masa excéntrica en la forma del frente de una fisura de un eje rotatorio. *Anales De Ingeniería Mecánica*, 19.
- [11] Rubio, P. (2014). Factor de intensidad de tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios. Universidad Carlos III de Madrid.
- [12] Tada, H., Irwin, G., Paris, P. (1985). In Paris Productions Incorporated (Ed.), *The stress analysis of crack handbook* (2ª ed.).
- [13] Anderson, T. L. (1995). *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, in: CRC Press, Boca Raton, 2 ed.
- [14] Carpinteri, A. (1992). Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars. *Engineering Fracture Mechanics*, 42, 1035-1040.



- [15] Carpinteri, A., Brighenti, R. (1996). Part-through cracks in round bars under cyclic combined axial and bending loading. *International Journal of Fatigue*, 18, 33-39.
- [16] Carpinteri, A., Vantadori, S. (2009). Sickle-shaped cracks in metallic round bars under cyclic eccentric axial loading. *International Journal of Fatigue*, 31, 759-765.
- [17] Carpinteri, A., Vantadori, S. (2009). Sickle-shaped surface crack in a notched round bar under cyclic tension and bending. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 32, 223-232.
- [18] Fonte, M., Freitas, M. (1999). Stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in round bars under bending and torsion. *International Journal of Fatigue*, 21, 457-463.
- [19] Ismail, A., Ariffin, A., Adbullah, S., & Ghazali, M. (2012). Stress intensity factors for surface cracks in round bar under single and combined loadings. *Meccanica*, 47, 1141-1156.
- [20] Muñoz-Abella, B., Rubio, L. (2010). Detección e identificación de fisuras de frente semielíptico en ejes mediante la aplicación de algoritmos genéticos. *Asociación Española De Ingeniería Mecánica*.
- [21] Muñoz-Abella, B., Rubio, L., Rubio, P., Montero, L. (2012). Flexibilidad de ejes rotativos con fisuras semielípticas. *Asociación Española De Ingeniería Mecánica*.
- [22] Shin, C., Cai, C. (2004). Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending. *International Journal of Fracture*, 129, 239-264.
- [23] Forman, R., Shivakumar, V. (1986). Growth behavior of surface cracks in the circumferential plane of solid and hollow cylinders, *Fracture Mechanics: Seventeen Volume. ASTM 905*, 59-74.
- [24] Raju, I., Newman, J. (1986). Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes and rods. *Fracture Mechanics: Seventeenth Volume, ASTM STP 905*, 17, 789-805.
- [25] Papadopoulos, C., Dimarogonas, A. (1987). Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack, *Journal of Sound and Vibration*, 117, 81-93.
- [26] Papadopoulos, C., Dimarogonas, A. (1988). Coupled longitudinal and bending vibrations of a cracked shaft, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 110, 1-8.
- [27] Zhou, T., Sun, Z., Xu, J., Han, W. (2005). Experimental analysis of a cracked rotor, *J. Dyn. Sys. Meas. Control*, 127, 313-320.
- [28] Gasch, R. (1993). A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack, *Journal of Sound and Vibration*, 160, 313-332.



- [29] Gasch, R. (2008). Dynamic behaviour of the laval rotor with a transverse crack, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22, 790–804.
- [30] Mayes, I., Davies, W. (1984), Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design*, 106, 139-145.
- [31] Darpe, A., Gupta, K., Chawla, A. (2004). Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor, *Journal of Sound and Vibration*, 269, 33-60.
- [32] Coker, E., Filon, L. (1957). *A treatise on photo-elasticity*. University Press.
- [33] Silva-Moreno, A., Rodríguez, F., Torres, R., Ochoa, N. (2006). Photoelasticity applied in industry. *Fifth Symposium Optics in Industry*.
- [34] Shih, Y., Chen, J. (1997). Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft. *International Journal of Fracture*, 19, 477-485.
- [35] Shih, Y., Chen, J. (2002). The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft. *Nuclear Engineering and Design*, 214, 137-145.
- [36] Carpinteri, A. (1992). Elliptical-arc surface cracks in round bars. *Fatigue Fracture of Engineering Materials*, 15, 1141-1153.
- [37] Carnicero, A. Introducción al método de los elementos finitos. (2001). Visitado el 28/01/2016 en http://www.profesores.frc.utn.edu.ar/industrial/sistemasinteligentes/FFlexible/Introduccion_al_MEF.pdf
- [38] I.C., P. Principia, Abaqus (Spanish). Visitado el 28/01/2016 en <http://www.principia.es/en/abaqus.php/>
- [39] D.S., S. *Abaqus theory manual*. Visitado el 28/01/2016 en <http://www.3ds.com/products-services/simulia/>

